JAN 9 - 1947

Akustische Zeitschrift

Im Auftrage der

DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

unter Mitwirkung der

DEUTSCHEN REICHSPOST und PHYSIKAL.-TECHN. REICHSANSTALT

herausgegeben von

MARTIN GRÜTZMACHER und ERWIN MEYER

1. M. Grützmacher und W. Lottermoser: Die Aufzeichnung kleiner Tonhöhenschwankungen 1
2. Gerhard Buchmann: Suchtonanalyse mit mechanischem Bandfilter und hochliegender Trägerfrequenz 7
3. Hanns Neusinger: Experimentelle Untersuchung eines quasiharmonischen Schwingers 11
4. Hermann Oberst: Eine Methode zur Erzeugung extrem starker stehender Schallwellen in Luft 27
5. Arndt von Lüpke: Untersuchungen an Blockflöten 39
6. L. Cremer: Über das Ersatzschema des Kugelknalls 46
7. Patentschau 50
8. Schrifttum 52
9. Nachrichten 56

Erstes Heft Fünfter Jahrgang Januar 1940

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Akustische Zeitschrift

Die Zeitschrift erscheint in 6 Heften je Jahrgang. Der Bezugspreis beträgt 10.— RM. je Jahrgang. Von den Originalbeiträgen und zusammenfassenden Berichten stehen den Verfassern 30 Sonderdrucke unberechnet zur Verfügung. Weitere Exemplare werden berechnet und müssen bei Rückgabe der Fahnenkorrekturen bestellt werden

Schriftleitung:

Dr. Martin Grützmacher, Oberregierungsrat und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

Professor Dr. Erwin Meyer, Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule, Berlin NW. 87, Franklinstr. 1

Beiträge, sowie alle die Schriftleitung betreffenden Zuschriften werden erbeten an: Dr. Martin Grützmacher, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

WECO-DÄMMSTOFFE-DRP.

gegen Schall jeder Art und Stärke (z. T. auch Wärme) entsprechen den bisherigen Forschungsergebnissen, der neuzeitlichen Technik und den Forderungen der Praxis und Erfahrung und besitzen höchsten Dämmwert, gleichbleibende Dauerwirkung, größte Wirtschaftlichkeit, geringste Baustärke, beste Belastungsfähigkeit und weitgehende Immunität gegenüber allen normalen Einflüssen der Praxis.

Tausendfach bewährte WECO-Schalldämmungen auf Grund 25jähriger Erfahrungen im In- und Ausland, zahllose Referenzen von staatlichen, städtischen, industriellen und sonstigen Bauten und Betrieben über von uns ausgeführte Schall-Dämmungen bei Fußböden, Wänden, Auflagern, Maschinen, Fundamenten usw.

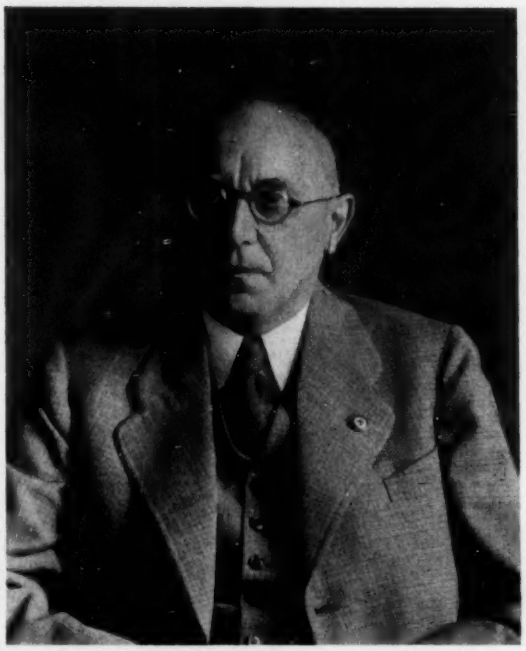
WEISS & CO, LEIPZIG C1 / Weco-Schalldämmungen-DRP.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Erstes Heft | Fünfter Jahrgang | Januar 1940

Dr. Heinrich Hecht zum 60. Geburtstag

Am 4. Februar 1940 begeht Dr. HEINRICH HECHT, Direktor der Electroacustic KG. Kiel, seinen 60. Geburtstag. Als einem Pionier der akustischen Wissenschaft spricht ihm die Akustische Zeitschrift die herzlichsten Glückwünsche aus.



Heinrich Hecht

In Magdeburg geboren, verbrachte HECHT seine Schulzeit in seiner eigentlichen Heimat Ostpreußen und studierte 1898—1904 an der Universität Königsberg. Mit einer Dissertation über die Wärmeleitfähigheit schlecht leitender Körper promovierte er als Schüler von VOLKMANN 1904 zum Dr. phil. Nach kurzer Assistentenzeit kam er für einige Jahre als Physiker zur Kaiserlichen Normal-Eichungskommission der späteren Abteilung für Maß und Gewicht der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und danach zu Siemens und Halske in Berlin, wo er als einer der wenigen Physiker, die es damals in dieser Weltfirma gab, im Entwicklungslaboratorium arbeitete. Noch heute erinnert er sich gern an diese Zeit, in der ihm Wesen und Bedeutung der Elektrotechnik in Fleisch und Blut überging. 1908 kam HECHT als junger Physiker zur Firma Neufeld & Kuhnke nach Kiel und begann hier mit USNER und später in Zusammenarbeit mit seinen weiteren Mitarbeitern und Freunden HAHNEMANN, LICHTE, DU BOIS RAYMOND und WILKENS die noch in den Kinderschuhen steckende Unterwasserschalltechnik zu dem zu entwickeln, was sie heute bedeutet. Ein Vergleich des damaligen Standes dieses Arbeitsgebietes mit dem heutigen läßt es dem Fachmann unwahrscheinlich erscheinen, daß diese Entwicklung in einem Zeitraum von nur 30 Jahren geleistet wurde, zumal hierfür keinerlei wissenschaftliche und technische Grundlagen vorhanden waren. In wahrer Pionier- und Forscherarbeit hat HECHT insbesondere zusammen mit HAHNEMANN klare Vorstellungen von den Eigenschaften mechanischer und elektrischer Schwingungsgebilde erarbeitet und diese mit ebenfalls neu zu schaffenden Meßmethoden experimentell erfaßt und geprüft. Die Frage

des Analogismus, Elektrizität-Mechanik, beschäftigte HECHT schon damals und hat in seinen Arbeiten bis in die jüngste Zeit hinein immer einen breiten Raum eingenommen. Tonpilz und Tonraum wurden von HAHNEMANN und HECHT als praktische Grundelemente der technischen Akustik erkannt und theoretisch und experimentell untersucht. Dabei ergab sich das „Paradoxon der gekoppelten Tonpilze", welches HECHT bestimmte, ausgedehnte Untersuchungen auf dem Gebiet der Schaltschemata und Kopplungsschwingungen anzustellen. In seinem kürzlich erschienenen Buch: Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde hat er diesen ganzen Fragenkomplex behandelt und gezeigt, wie man die Differentialgleichungen aller Schwingungsgebilde aufzustellen hat, damit jederzeit das physikalische Geschehen klar und deutlich in ihnen und ihren Lösungen zum Ausdruck kommt.

Die Electroacustic KG., deren Mitbegründer HECHT im Jahre 1926 war, konnte sich unter seiner wissenschaftlichen Leitung aus kleinen Anfängen heraus zu einem bedeutenden Unternehmen, das Weltruf besitzt, entwickeln. Im Zuge der Erweiterung dieses Werkes wurden neue über den Rahmen der Unterwasserschalltechnik hinausgehende physikalische Aufgaben unter HECHTS Führung aufgenommen und praktischen Lösungen zugeführt.

Wir wünschen ihm zu seinem Geburtstag von Herzen weiter Gesundheit, Wohlergehen und die Frische, die jede wissenschaftliche Zusammenarbeit und jedes kameradschaftliche Zusammensein mit ihm auszeichnet.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Erstes Heft | Fünfter Jahrgang | Januar 1940

Die Aufzeichnung kleiner Tonhöhenschwankungen

Von M. Grützmacher und W. Lottermoser

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

(Mit 9 Textabbildungen)

Der von uns in zwei früheren Arbeiten[1]) beschriebene Tonhöhenschreiber hat die Aufgabe, Tonhöhenschwankungen von 1—2 Oktaven mit einer Genauigkeit von 3—6% anzuzeigen. Will man sehr kleine Tonhöhenschwankungen untersuchen, so reicht die Aufzeichnung mit diesem Gerät nicht aus.

Es wurde daher ein neues Meßverfahren entwickelt, das zwar die Elemente des alten Tonhöhenschreibers benutzt, in seiner Wirkungsweise im einzelnen jedoch erheblich von dem alten Verfahren abweicht.

Meßverfahren

Die in ihrer Grundfrequenz anzuzeigende Schwingung wird durch Gleichrichtung und Aussiebung verstärkt, durch Übersteuerung in eine rechteckige Schwingungskurve verwandelt und anschließend durch eine Differentation (Einfügung eines mit der Frequenz ansteigenden Frequenzganges) in einzelne im Abstand der Periode der Grundspannung aufeinanderfolgende Spannungsspitzen umgewandelt. Mit diesen Spannungsspitzen wird eine Kippschwingung gesteuert; doch liegt im Gegensatz zu dem bereits beschriebenen Tonhöhenschreiber die Frequenz dieser Kippschwingung wesentlich höher als die Frequenz der Steuerspannung, so daß eine gegenüber dem alten Verfahren abgeänderte Auswertung der so gewonnenen Frequenzanzeige notwendig wird.

In Abb. 1 sind die Umwandlungs- und Steuervorgänge im einzelnen dargestellt. In der obersten Zeile a ist die Schwingung, deren Frequenz aufgeschrieben werden soll, abgebildet. Zeile b zeigt die Spannungsspitzen nach der Umwandlung durch einen übersteuerten Verstärker und nach der Differentation. Darunter gibt die Zeile c die schnellen Kippschwingungen mit den Unterbrechungen durch die

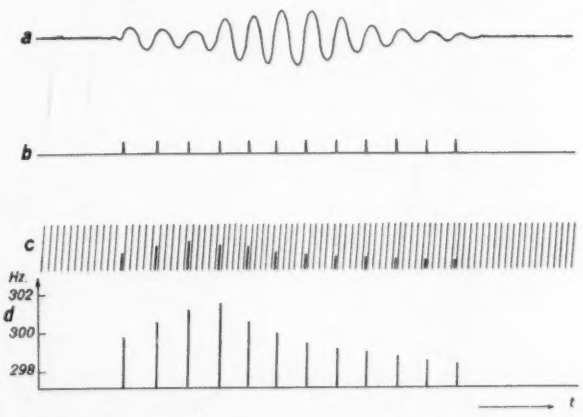


Abb. 1. Die Umwandlungsphasen bei der Aufzeichnung kleiner Tonhöhenschwankungen

a) unverzerrte Schwingung
b) Spannungsspitzen im Abstand der Grundperiode
c) Schnelle Kippschwingung, unterbrochen durch die Spannungsspitzen der Zeile b
d) Aufzeichnung der Tonhöhe nach Aussonderung der fortlaufenden Kippschwingung durch Helligkeits- oder örtliche Steuerung

Steuerspannungsspitzen der Zeile b wieder. Da die Kippschwingung nach jeweiligem Anstoß durch die Steuerspitzen in stets gleicher Geschwindigkeit und damit Frequenz abläuft,

[1]) M. Grützmacher und W. Lottermoser, Akust. Z. 2 (1937), S. 242; 3 (1938), S. 193.

gibt die Länge des letzten Aufstriches unmittelbar ein Maß für den Abstand zwischen den einzelnen Steuerspitzen und damit für die Periodenlänge bzw. für die Frequenz der Spannung *a* wieder. Allerdings ist es nicht möglich, schon die Spannung der Zeile c fortlaufend zu registrieren. Die kurzen die Tonhöhe anzeigenden Endstriche würden von der dicht aufeinanderfolgenden fortlaufenden Kippschwingung verdeckt werden und könnten in der Fotografie nicht erkannt werden. Es müssen also noch Maßnahmen getroffen werden, die diese Endstriche allein aus der Kippschwingung hervortreten lassen.

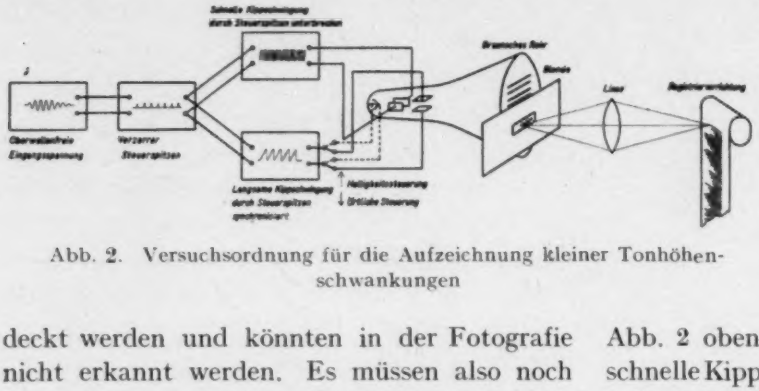


Abb. 2. Versuchsordnung für die Aufzeichnung kleiner Tonhöhenschwankungen

Eine Möglichkeit, die zunächst erprobt wurde, bietet die Helligkeitssteuerung des Lichtstrahls. Zwischen Kathode und Wehnelt-Zylinder einer Kathodenstrahlröhre wird eine von den Steuerspitzen synchronisierte zweite Kippschwingung angelegt, die jeweils nur für einen kurzen Augenblick, wenn gerade der Endstrich aufgezeichnet werden soll, den Brennfleck heller aufleuchten läßt. Noch einfacher und sicherer läßt sich jedoch die Isolierung des letzten Aufstriches durch eine örtliche Steuerung der schnellen Kippschwingung erreichen. Hierzu wird die zweite von der aufzuzeichnenden Schwingung synchronisierte Kippschwingung an das zweite Plattenpaar der Kathodenstrahlröhre gelegt, und es werden so die durchlaufenden Striche gleicher Länge von den variablen Endstrichen räumlich getrennt. Der Leuchtstrich, auf dessen Länge es ankommt, liegt dann immer an der Stelle größter Ablenkung. Durch Ausblenden des Endstriches kann dieser in einfacher Weise ausgesondert werden. Als Endergebnis wird eine Frequenzaufzeichnung erzielt, wie sie in Zeile d dargestellt ist. Es ist leicht einzusehen, daß bei solchen Verfahren die Genauigkeit umso größer wird, je höher die vorher eingestellte Kippschwingung über der zu messenden Frequenz liegt.

Abb. 2 zeigt schematisch den Aufbau der Versuchsanordnung. Die Eingangsspannung, die hinter einem Mikrophon oder Tonabnehmer erhalten und deren Frequenzschwankung untersucht werden soll, wird nach ausreichender Verstärkung einem Verzerrer zugeführt, der sie in einzelne in Abständen der Grundperiode auseinanderliegende Spannungsspitzen umwandelt. Diese werden gleichzeitig zwei Kippschwingungsgeneratoren zugeleitet, die zur Erzeugung einer Kippschwingung in der üblichen Weise ein Stromtor, eine Kapazität und einen Aufladewiderstand benutzen. Der in der Abb. 2 oben gezeichnete Generator liefert die schnelle Kippschwingung, die nach mehrmaligem, unbeeinflußtem Ablauf durch die Steuerspitzen unterbrochen wird und somit in der Länge des letzten Aufstriches ein Maß für die Frequenz liefert. Der darunter angegebene Generator erzeugt eine Kippschwingung, die jeweils von den Steuerspitzen synchronisiert wird und durch eine Helligkeits- oder durch eine örtliche Steuerung — in der Abbildung durch die zwei Schalterstellungen voneinander unterschieden — die Aussonderung des jeweils letzten Aufstriches der schnellen Kippschwingung ermöglicht. In der Abbildung ist diese Aussonderung für den Fall der örtlichen Steuerung dargestellt. Auf dem Schirm der Kathodenstrahlröhre erkennt man das synchronisierte stehende Bild der schnellen Kippschwingung, aus welchem durch eine Blende nur der letzte Aufstrich herausgenommen und von der Registriereinrichtung aufgenommen wird.

Fehlerbetrachtung

Vor dem Einsatz des Gerätes für praktische Messungen war zu prüfen, wieweit die Frequenzanzeige von den Amplituden der Eingangsspannung abhängig ist. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in Abb. 3 dargestellt. Man sieht, daß die Frequenzanzeige sehr weit-

gehend unabhängig von der Eingangsspannung ist; die Abweichungen von der Sollfrequenz liegen innerhalb eines Intensitätsbereiches von 40 *db* unter $1^0/_{00}$. Zugleich erkennt man, daß die Frequenzkonstanz der laufenden hohen Kippschwingung ausreichend ist.

Weiter sei an dieser Stelle erneut darauf hingewiesen, daß man streng mathematisch nicht von Frequenzschwankungen sinusförmiger Spannungen sprechen kann. Denn entweder ist die Spannung wirklich sinusförmig, dann hat sie stets die gleiche Frequenz oder aber die Frequenz bzw. die Periode ist nicht konstant, dann müssen in der Schwingungskurve auch kleine Abweichungen von der Sinusform vorhanden sein. Bei der vorliegenden Aufzeichnung werden ebenso wie bei der Aufzeichnung von Melodiekurven durch den normalen

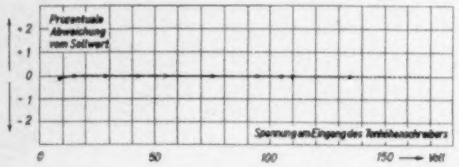


Abb. 3. Frequenzanzeige in Abhängigkeit von der Eingangsspannung

Tonhöhenschreiber die Perioden der Nulldurchgänge aufgeschrieben, und es ist zweckmäßig, die sich so ergebenden Frequenzen als Momentanfrequenzen der untersuchten Schwingung zu definieren. Diese Bezeichnung ist namentlich dann berechtigt, wenn es sich um die Aufzeichnung einer reinen Frequenz- oder einer reinen Amplitudenmodulation handelt oder wenn eine Modulation vorliegt, bei welcher eine dieser beiden Modulationsarten stark überwiegt.

Besondere Vorsichtsmaßnahmen sind zu treffen, wenn eine Frequenzmodulation bei verhältnismäßig hoher modulierender Frequenz zu vermuten ist. In diesem Falle hat man es mit einem sehr breiten sich oft über viele 100 Hz erstreckenden Spektrum zahlreicher Einzelfrequenzen zu tun, und zur richtigen Wiedergabe der Momentanfrequenzen ist streng auf Einhaltung einer unverzerrten Übertragung im gesamten Übertragungsbereich zu achten.

Auch können Brummspannungen von 50 Hz und unregelmäßige elektrische Störungen Frequenzschwankungen vortäuschen, so daß u. U. durch mehrere Aufnahmen mit Filtern festgestellt werden muß, um welche Form der Überlagerung oder Modulation es sich gerade handelt.

Meßergebnisse

In Abb. 4a ist die Tonhöhenkurve der Ausgangsspannung eines Schwebungssummers — aufgenommen nach dem oben beschriebenen Verfahren — wiedergegeben. Obwohl der Ordinatenmaßstab Schwankungen von Bruchteilen eines Prozentes noch leicht erkennen ließe, ist nur eine gerade Profillinie, d. h. eine praktisch konstante Frequenz, abzulesen. Unter der Aufzeichnung der Tonhöhe ist ebenso wie in allen folgenden Abbildungen das Oszillogramm der Schwingung, darüber eine Zeitmarke, aufgeschrieben. Die Dauer einer Sekunde ist nochmals getrennt zu Beginn der Aufzeichnungen angegeben.

Schreibt man den reinen Ton der Abb. 4a auf eine Schallplatte und nimmt den Ton mit einem handelsüblichen durch das 50 Perioden-Netz angetriebenen und synchronisierten Abspielgerät elektrisch wieder ab, so ergibt sich eine Tonhöhenkurve der Abb. 4b. Offenbar sind jetzt starke z. T. unregelmäßige Schwankungen der Periode eingetreten, die immerhin Werte bis zu 1% der Sollfrequenz erreichen. Da noch unklar war, in welcher Stärke diese Schwankungen auf Störungen durch das Schallplattengeräusch oder durch eine Überlagerung eines 50 Hz Tones zurückgingen, wurden durch ein Sieb weitgehend alle Frequenzen unter 100 und über 300 Hz entfernt und die in Abb. 4c wiedergegebene Kurve erhalten. Die nunmehr in fast gleicher Stärke wie zuvor erhaltene periodische Frequenzschwankung der Momentanfrequenzen muß als eine Frequenzmodulation durch die Frequenz 50 Hz angesehen werden. Entstanden war sie im vorliegenden Falle wahrscheinlich durch eine mechanische Vibration des Tonabnehmers. Beim Abhören des Tones war auch deutlich eine gewisse Rauhigkeit wahrzunehmen.

Die gleiche Untersuchung wurde für den Fall des Tonfilms angestellt. Zur Verfügung stan-

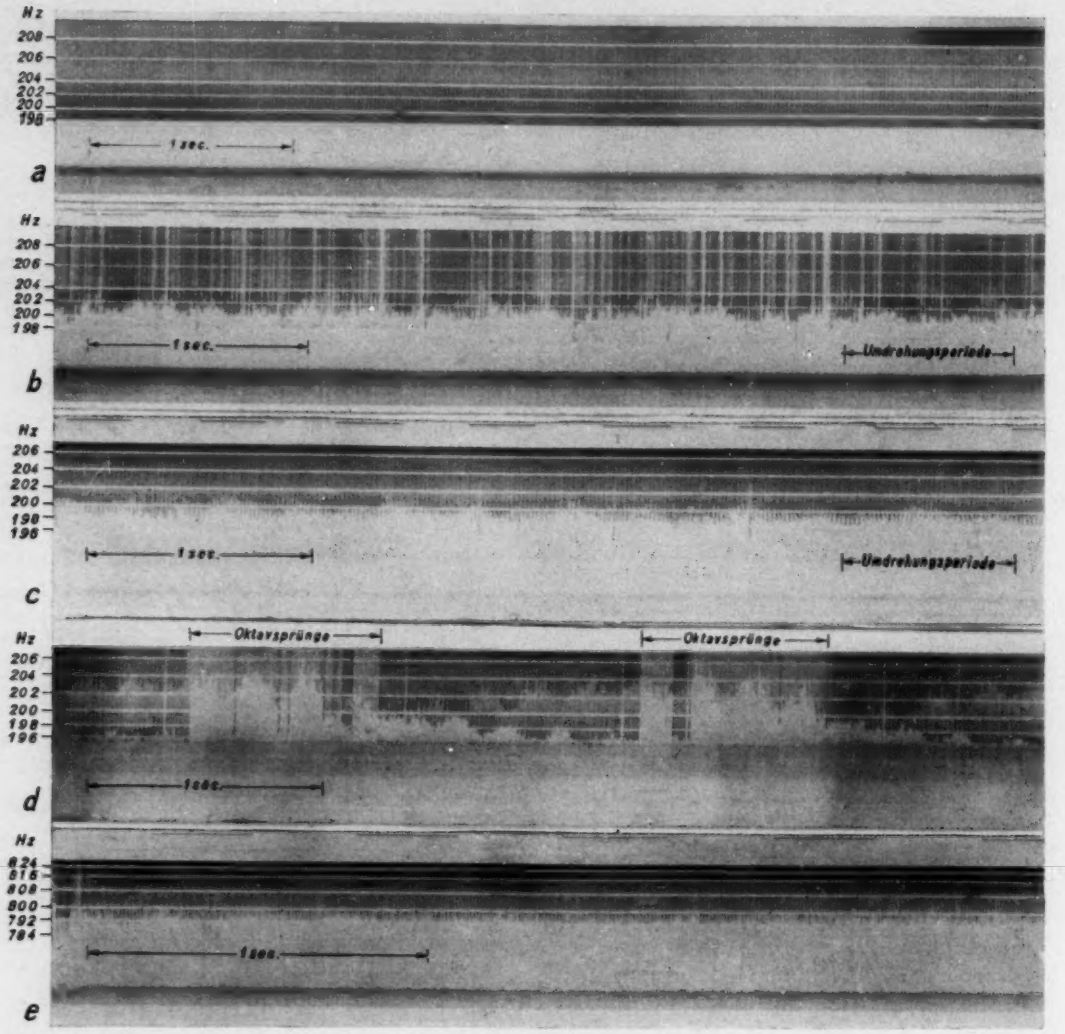


Abb. 4. Tonhöhenaufzeichnung
a) Schwebungssummerton 200 Hz; b) Schallplattenton 200 Hz; c) Schallplattenton 200 Hz, hinter Bandfilter der Grenzfrequenzen 100 und 300 Hz; d) Tonfilmton 200 Hz; e) Tonfilmton 800 Hz

den zwei Frequenzfilme nur mittelmäßiger Qualität mit den aufgezeichneten Frequenzen 200 und 800 Hz. Die Tonhöhenkurven für diese beiden Töne zeigen die Abb. 4d und 4e. Die Aufnahme des tiefen Tones (Abb. 4d) bietet zwar ein zunächst verwirrendes Bild, doch läßt es sich auch in den Einzelheiten gut deuten. Sieht man von den zwei Stellen fehlerhafter Aufzeichnung (in der Abbildung durch „Oktavsprünge" gekennzeichnet) ab, so erkennt man eine in der Frequenz 100 Hz erfolgende Frequenzmodulation der immerhin beträchtlichen Stärke von rd. 1% der Sollfrequenz. Die daneben sichtbare langsame Schwebung (Periode etwa 2 sec) geht offenbar darauf zurück, daß die modulierende Frequenz (100 Hz) nicht genau gleich der halben modulierten Frequenz (200 Hz) ist. Die schnellere Schwebung (Periode 0,25 sec) dagegen dürfte ihre Ursache in einer überlagerten Frequenzmodulation durch die Frequenz 96 Hz haben und auf die Filmperforation zurückgehen.

Abb. 4e zeigt das Meßergebnis für die Filmaufzeichnung des Tones 800 Hz. Auch hier ist neben einer schwachen langsamen Tonhöhenschwankung wieder eine starke rd. 1%ige Frequenzmodulation gleichfalls im Rhythmus von 100 Hz zu erkennen.

Größer sind im allgemeinen die Frequenzschwankungen, die sich beim Spielen und Singen von reinen Tönen ergeben, selbst wenn man sich bemüht, deren Tonhöhe möglichst einzuhalten.

Die Abb. 5 zeigt diese Verhältnisse für den Geigenton. Wird die leere a-Seite mit mittlerem Druck angestrichen, so kann eine noch recht frequenzkonstante Tongebung gelingen (Abb. 5a). Bei starkem Bogendruck (Abb. 5b) treten jedoch auch auf der leeren Saite Schwankungen von 1—1,5% des Mittelwertes auf. In Abb. 5c ist der Ton des gleichen a auf der d-Seite gegriffen, wiedergegeben, während die Abb. 5d die beim Geigenvibrato auftretenden Tonhöhenschwankungen veranschaulicht. Natürlich werden die Frequenzschwankungen bei anderen Geigenspielern nicht dieselben sein.

Frequenzschwankungen in etwas größerem Ausmaße wurden bei Holzblasinstrumenten gemessen. Als Beispiele seien hier die Aufnahmen von Tönen der Blockflöte, der Klarinette und der Querflöte wiedergegeben. Abb. 6a zeigt

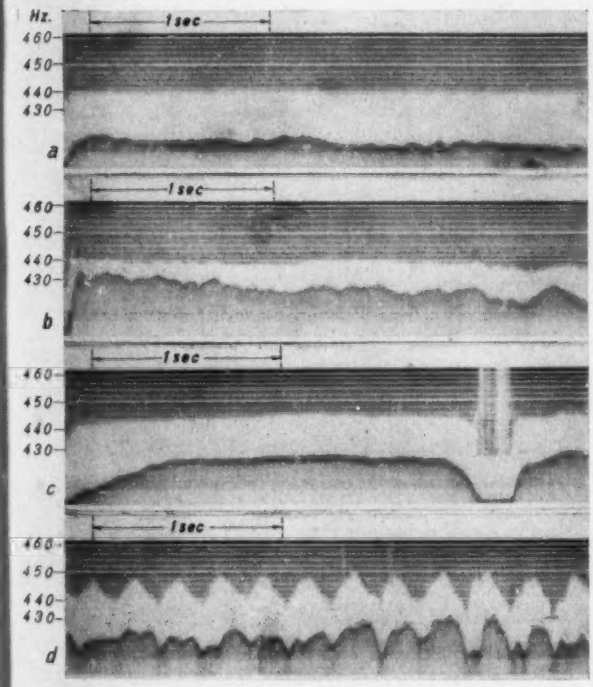


Abb. 5. Tonhöhenkurven von Geigentönen
a) Ton a′ auf der leeren a-Seite mit mittlerem Druck angestrichen; b) Ton a′ auf der leeren a-Saite mit starkem Druck angestrichen; c) Ton a′ auf der d-Saite gegriffen, Auf- und Abstrich; d) Ton a′ auf der d-Saite mit Vibrato

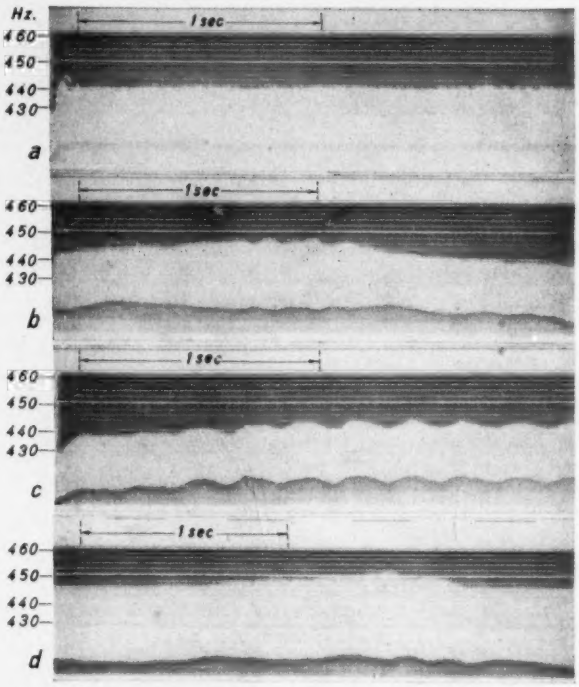


Abb. 6. Tonhöhenkurven einiger Holzblasinstrumente
a) Blockflötenton bei gleichmäßiger Tongebung;
b) Blockflötenton bei Änderung des Anblasedruckes;
c) Blockflötenton bei Vibrato; d) Klarinettenton a bei Änderung des Anblasedruckes

den Blockflötenton bei möglichst gleichmäßiger Tongebung, Abb. 6b den gleichen Ton bei Änderung des Anblasedrucks. Die sich ergebende Frequenzschwankung (bis zu 2,5% vom Sollwert) ermöglicht das Hervorbringen eines Blockflötenvibratos durch Änderung des Anblasedruckes (Abb. 6c). Auch der Klarinettenton (Abb. 6d) weist Schwankungen der Tonhöhe um etwa 1% bei schwankender Anblasestärke auf. Diese sind zwar verhältnismäßig klein, doch sollten sie davor warnen, Rohrblattinstrumente wie die Klarinette oder die Oboe, als Stimmnormale zu benutzen.

Von beträchtlichem Ausmaße (bis zu 4% vom Sollwert) sind die Frequenzschwankungen des Querflötentones (Abb. 7a und b). Bedenkt man, daß das Tonintervall eines temperierten Halbtones einer rd. 6%igen Frequenzsteigerung entspricht, so erkennt man die Schwierigkeit, auf diesem Instrument völlig rein zu spielen. Wie zu erwarten war, zeigen alle Instrumente eine Proportionalität zwischen Anblas- und Anstrichstärke und Frequenz.

Mit am größten sind die Tonhöhenschwankungen der menschlichen Stimme. Kann die Tonhöhe bei schwankender Lautstärke nur mit einer Genauigkeit von 2—3% eingehalten werden, wie Abb. 8a zeigt, so erreichen die Frequenzschwankungen beim absichtlich hervorgerufenen Vibrato der geschulten Stimme Werte bis zu $\pm 6\%$ der Sollfrequenz = rd. $\pm$ einem Halbton; siehe hierzu die Abb. 8b, in welcher der stark zusammengedrängte Frequenzmaßstab zu berücksichtigen ist.

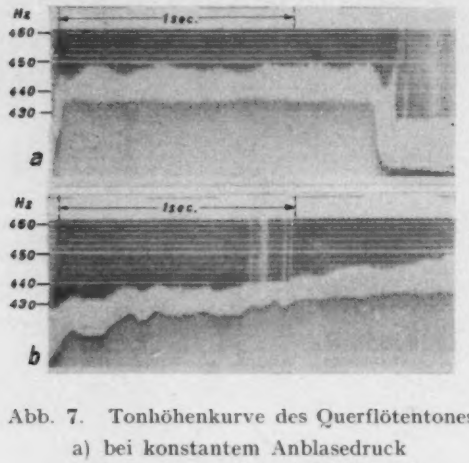


Abb. 7. Tonhöhenkurve des Querflötentones
a) bei konstantem Anblasedruck
b) bei ansteigendem Anblasedruck

In der letzten Abb. 9 ist auf eine Anwendungsmöglichkeit des Tonhöhenschreibers hingewiesen, die heute von einer gewissen Bedeutung ist, da man im Begriffe ist, den Stimmton international neu festzusetzen und seine Einhaltung zu kontrollieren. Aus Rundfunkdarbietungen wurden mit einem schmalen Filter die Töne der Frequenzen 410—460 Hz ausgesiebt und ihre Tonhöhe aufgezeichnet. Bei den hier wiedergegebenen Aufnahmen von Orchesterstücken erkennt man eine stark schwankende Frequenzanzeige, die auf die zahlreichen Instrumente zurückzuführen ist. Eine mittlere Tonhöhe kann jedoch mit ziemlicher Genauigkeit abgelesen werden.

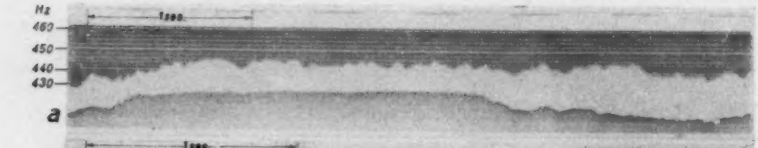


Abb. 8. Tonhöhenkurven der menschlichen Stimme
a) von weiblicher Stimme gesungenes a′ ohne Vibrato. Die Sängerin hat sich bemüht, die Tonhöhe trotz schwankender Lautstärke möglichst einzuhalten; b) Vibrato einer geschulten Stimme. Ausschnitt aus dem Lied „Am Brunnen vor dem Tore"

Zusammenfassung

Ein Verfahren zur Aufzeichnung sehr kleiner Tonhöhenschwankungen wird beschrieben. Als Meßbeispiele werden Aufnahmen von Schallplatten- und Tonfilmtönen, von Klängen einiger Musikinstrumente, von Gesang und vom Kammerton a bei Rundfunkdarbietungen gezeigt.

(Eingegangen am 4. Juli 1939.)

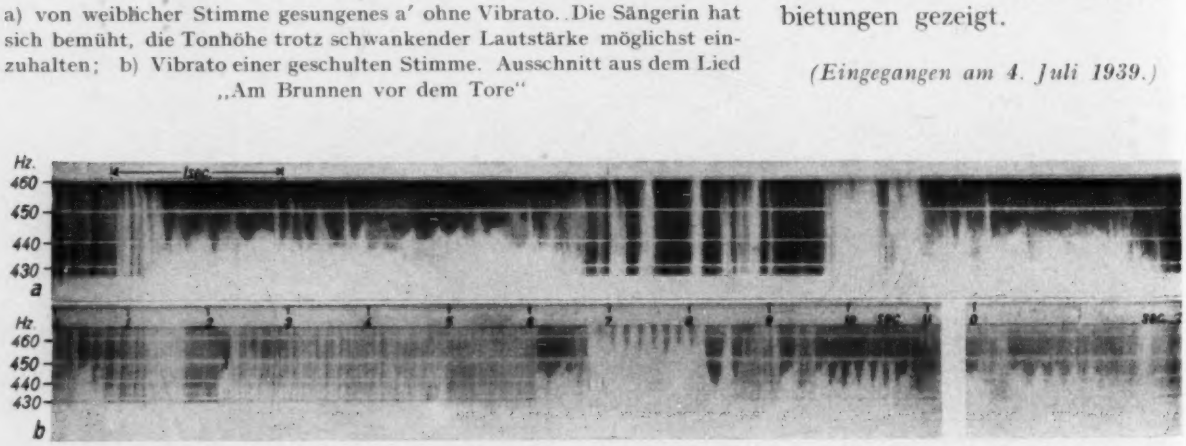


Abb. 9. Tonhöhenkurven des Tones a′ bei Rundfunkdarbietungen
a) Ausschnitt aus einem Orchesterstück; b) Ausschnitt aus einem Orchesterstück mit Saxophon

Suchtonanalyse mit mechanischem Bandfilter und hochliegender Trägerfrequenz

Von Gerhard Buchmann

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung der Technischen Hochschule Berlin

(Mit 11 Textabbildungen)

Fast alle automatischen Verfahren zur Klanganalyse verwenden zur Trennung der Teiltöne feste oder veränderliche Filter; von ihrer Durchlaßbreite hängt das Auflösungsvermögen der Apparatur ab. Sollen noch eng benachbarte Teiltöne sauber getrennt werden, so muß das Filter eine sehr geringe Bandbreite und eine große Flankensteilheit aufweisen. Wählt man das Suchtonverfahren in der von GRÜTZMACHER[1]) angegebenen Form mit einer durch das zu analysierende Frequenzband gleitenden Frequenz, so liegt die Durchlaßfrequenz nahe bei 0 Hz, und es läßt sich eine Bandbreite von etwa 20 Hz mit einem elektrischen Tiefpaß bei einigem Aufwand gut erreichen. Die Suchtonanalyse mit hochliegender Trägerfrequenz z. B. 20—40 kHz, die wegen der bei gleicher Bandbreite kürzeren Einschwingzeit[2]) in manchen Fällen vorzuziehen ist, bedingt jedoch bei gleichen Anforderungen an das Auflösungsvermögen Filter sehr hoher Gütezahl. Hierfür reichen elektrische Kreise nicht mehr aus. Für diesen Zweck haben sich deshalb allgemein elektromechanische Filter eingeführt. Sie stellen meistens einen einfachen Resonanzkreis dar, der in einem piezoelektrisch angeregten Quarz oder in einem in der Mitte eingespannten magnetisch erregten Stahlstab[3]) besteht. Resonanzkreise haben jedoch den Nachteil, daß die Kurve des Übertragungsmaßes sehr spitz ist, d. h. die maximale Übertragung nur in einem äußerst kleinen Frequenzbereich stattfindet. Außerdem sind die Flanken flach, so daß benachbarte Teiltöne stark verschiedener Amplitude nicht mehr getrennt werden. Aus diesem Grunde geht man zur Verwendung von Bandfiltern über, die bei größerer Flankensteilheit auch einen breiteren Bereich aufweisen, indem das Übertragungsmaß annähernd konstant ist. Die bisher für die Zwecke der Suchtonanalyse bekannten Bandfilter sind Quarzfilter. Im folgenden wird ein mechanisches Bandfilter mit nicht piezoelektrischer Anregung und eine mit diesem Filter ausgerüstete Apparatur zur automatischen Klanganalyse beschrieben.

Die in der Rundfunktechnik verwendeten Bandfilter bestehen im allgemeinen aus zwei lose gekoppelten Resonanzkreisen. Entsprechend dem Grade der Kopplung bildet sich eine Durchlaßkurve aus, die eine mehr oder weniger starke Einsattelung aufweist und der gewünschten Kurve nahekommt. Da sich aber, wie schon erwähnt, die Güte elektrischer Kreise nicht ausreichend steigern läßt, wurde die elektrische Anordnung in eine mechanische übersetzt, mit der man erfahrungsgemäß wesentlich geringere Dämpfungen erreichen kann.

Zur Veranschaulichung der Wirkungsweise wollen wir die elektrisch-mechanische Analogie heranziehen, in der die Kapazität C der Masse M, die Selbstinduktion L der Federung (Nachgiebigkeit) F, die Spannung der Schnelle, der Strom der Kraft und der Leitwert dem Reibungs- oder Nachwirkungswiderstand entsprechen. Das linke, elektrische Schaltbild der

[1]) M. GRÜTZMACHER, Z. techn. Phys. 8 (1927), S. 507.

[2]) C. H. WALTER, Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 14 (1935), H. 1, S. 56.

[3]) A. MOORE und A. S. CURTIS, Bell Syst. techn. J. 6 (1927), S. 217.
W. HOLLE, Z. techn. Phys. 12 (1937), S. 312.
G. WEYMANN, Z. Hochfr. u. Elakus. 49 (1937), S. 181.
K. SCHOEPS, ebenda 49 (1937), S. 184

Abb. 1 stellt zwei durch eine Selbstinduktion gekoppelte Schwingungskreise dar, das rechte ist das entsprechende mechanische Schaltbild. Der anregende Strom i entspricht der Kraft p, die erzeugte Wechselspannung e der Schnelle v. Schwingen die Systeme in Phase, so erhält man die eine freie Eigenschwingung, für welche die Eigenfrequenz der Einzelsysteme maßgebend ist. Schwingen sie in Gegenphase, so wird die Kopplung L_3 (F_3) beansprucht, die Resonanzfrequenz erhöht sich und zwar um so mehr, je kleiner L_3 (je kürzer F_3) ist. Dies bedeutet, daß

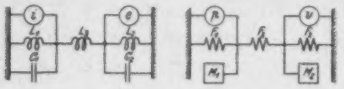


Abb. 1. Schaltschema elektrischer und mechanischer gekoppelter Schwingungskreise

die Bandbreite mit festerer Kopplung steigt. Sowohl das elektrische als auch das mechanische System sind beiderseits „geerdet". Auch bei mechanischen Schaltungen steigen mit der Frequenz die Erdungsschwierigkeiten, d. h. eine Erdung ohne Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion gibt es ebensowenig wie eine absolut starre Einspannung. Soll das Filter transportabel sein, so muß eine weitgehende Unabhängigkeit von der Einspannung erreicht werden, da sich sonst die Durchlaßfrequenz fortwährend ändert. Aus diesem Grunde wurde das mechanische Schaltbild in der Weise abgeändert, daß durch Spiegelung jedes der beiden Einzelsysteme zwei Bewegungsknoten entstehen, in denen die Aufhängung mittels einer sehr weichen Feder möglich ist. Man erhält damit zwei durch eine Feder gekoppelte Tonpilze[4]). Abb. 2

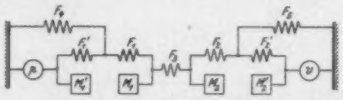


Abb. 2. Schema des mechanischen Bandfilters

zeigt das mechanische Schaltbild, in dem F_4 und F_5 die Aufhängefedern sind. Aus diesem Schema lassen sich verschiedene Ausführungsformen des Filters entwickeln. In Abb. 3 ist ein Filter mit elektrodynamischer Anregung für eine Durchlaßfrequenz von 20 kHz maßstäblich dargestellt. Die Buchstaben entsprechen denen in Abb. 2. Die Federn bestehen aus Silberstahlstäben, die Massen aus Walzeisen. Zur Erzielung schmaler Resonanzkurven muß das Verhältnis der Massen zur Federung jedes Einzelsystems möglichst groß sein. Deshalb ist die Gesamtmasse groß. Für die Anregung und Abnahme ist es zweckmäßig, den mechanischen Eingangs- und Ausgangswiderstand des Systems, das Verhältnis der Kraft zur Schnelle klein zu machen. An der Kopplungsseite der Einzelsysteme soll der mechanische Widerstand gegenüber der Kopplungsfeder groß sein, um eine genügend lose Kopplung zu erhalten. (F_3 muß bei einer Bandbreite von $^1/_{1000}$ der Durchlaßfrequenz $\sim 1000 \cdot F_1$ sein.) Man erreicht diese Übersetzung des mechanischen Widerstandes durch verschiedene Größe der

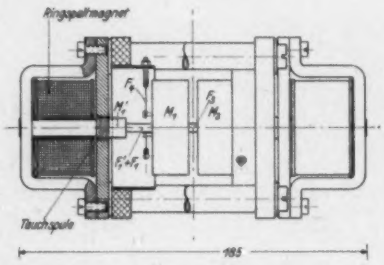


Abb. 3. Bandfilter mit elektrodynamischer Anregung und Abnahme

Massen M_1 und M_1' sowie M_2 und M_2'. Dann verhalten sich die Kräfte wie die Massen und die Schnellen umgekehrt dazu; der mechanische Widerstand wird also im Verhältnis des Quadrates der Massen übersetzt. Sehr wichtig zur Erhaltung der geringen Dämpfung des Stahles ist, daß sämtliche Verbindungsstellen zwischen Massen und Federungen sehr fest sind[5]); Verschraubungen allein reichen nicht aus. Am besten hat sich das Einpressen und Einlöten bewährt. Auch die Tauchspulen müssen gut mit den kleinen Massen verbunden sein. Das System wird durch zwei Fadenspinnen aus Angelseide in einem Rahmen gehalten, der die beiden Topfmagnete trägt. Abb. 4 zeigt die Durchlaßkurve dieses Filters.

[4]) W. Hahnemann und H. Hecht, Phys. Z. 21 (1920), S. 187.

[5]) Gleiche Erfahrungen in der Wasserschalltechnik s. F. Aigner, Unterwasserschalltechnik, Berlin 1922, S. 172—174.

Die Form des Filters ändert sich naturgemäß mit der Art der Anregung. Bei elektromagnetischer und elektrostatischer Anregung läßt man die Kraft am besten zwischen der großen und der kleinen Masse der Schwingkreise wirken.

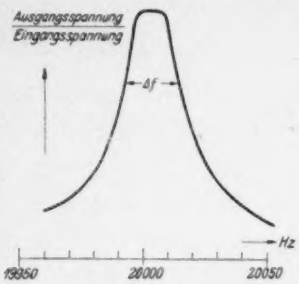


Abb. 4. Durchlaßkurve des Bandfilters nach Abb. 3

Ein System dieser Art mit magnetischer Anregung für eine Trägerfrequenz von 12,5 kHz stellt Abb. 5 dar, die zugehörige Durchlaßkurve zeigt Abb. 6.

Unter Verwendung des vorgeschriebenen Filters wurde ein Analysator gebaut[6]), dessen

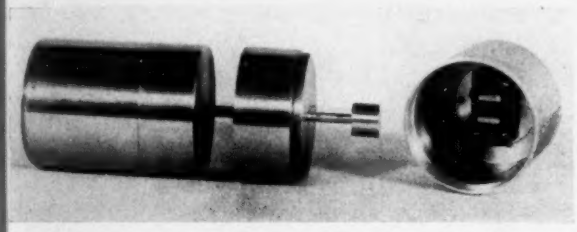


Abb. 5. Bandfilter mit magnetischer Anregung und Abnahme

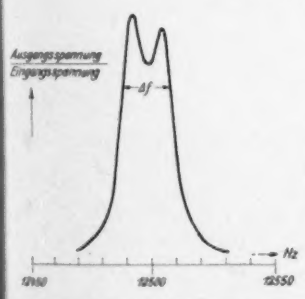


Abb. 6. Durchlaßkurve des Bandfilters nach Abb. 5

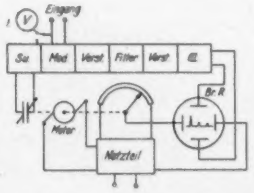


Abb. 7. Schema des Frequenzanalysators

Schema in Abb. 7 dargestellt ist. Voraussetzung für die Anwendungsmöglichkeit dieser Appa-

[6]) Die konstruktive Durchgestaltung der Apparatur wurde von Herrn GERHARD KOSSATZ im Rahmen einer Diplomarbeit ausgeführt.

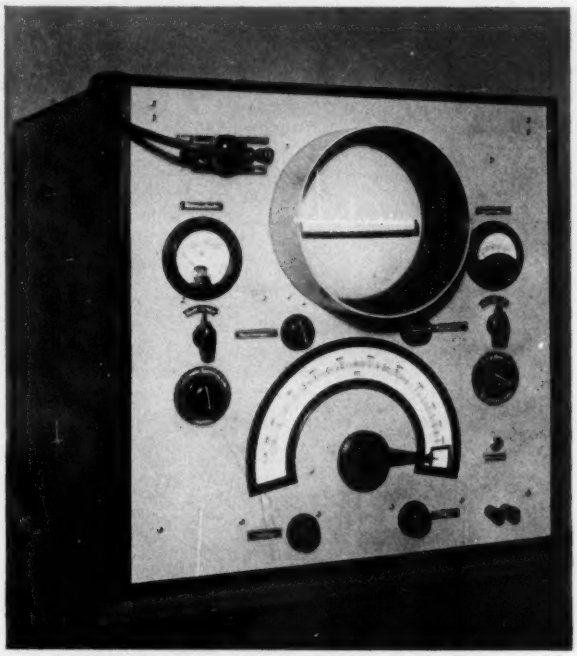


Abb. 8. Außenansicht des Gerätes

ratur ist, daß der zu untersuchende Schwingungsvorgang als elektrische Wechselspannung vorliegt, d. h. akustische und mechanische Schwingungen müssen erst in bekannter Weise in elektrische umgewandelt werden. An den Eingangsklemmen eines Gleichrichters, in diesem Falle eines Ringmodulators, liegen das zu untersuchende Frequenzgemisch und die Trägerspannung. Letztere wird von einem Rückkopplungsgenerator erzeugt und ist durch einen Drehkondensator von 20—40 kHz veränderlich. Durch die Modelung tritt das Gemisch als oberes und unteres Seitenband der Trägerspannung auf. Das Gemisch selbst und der Träger werden durch die Art der Ringmodulatorschaltung weitgehend unterdrückt. Die Seitenbänder werden verstärkt und gelangen an den Eingang des mechanischen Filters. Die Durchlaßfrequenz des Filters liegt bei 20 kHz. Wandert der Träger von 20 nach 40 kHz, so wird das untere Seitenband am Durchlaß des Filters vorbeigezogen und jeweils der Energieinhalt eines 20 Hz breiten Abschnittes auf den nachfolgenden Verstärker übertragen, gleichgerichtet und den senkrecht ablenkenden Platten einer Kathodenstrahlröhre zugeführt.

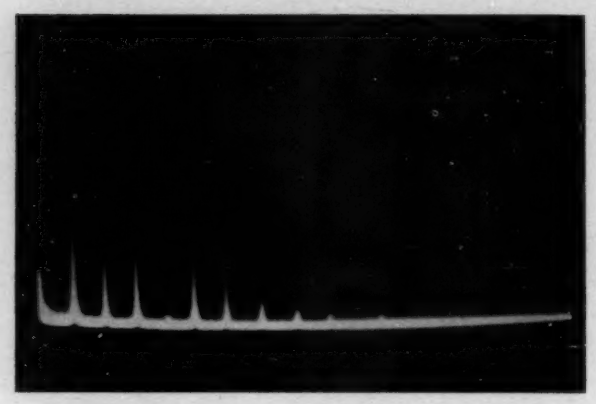


Abb. 9. Geigenklang

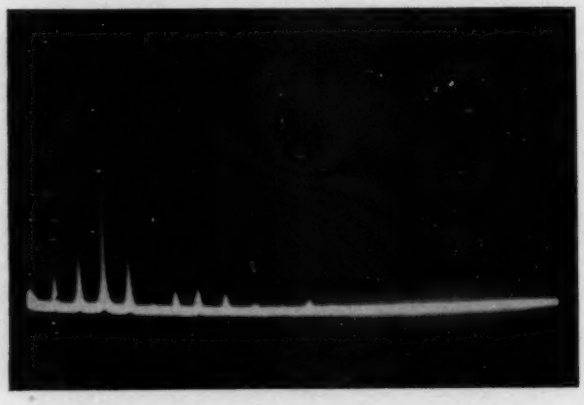


Abb. 10. Geigenklang

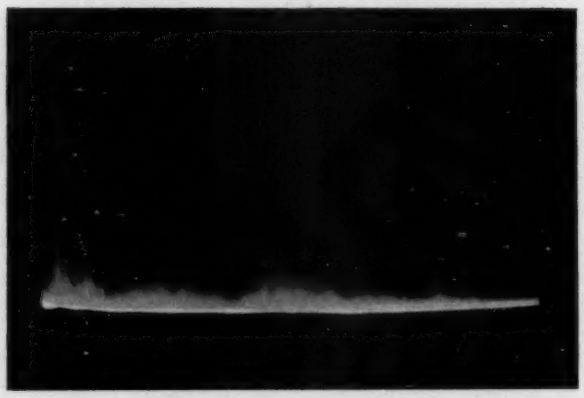


Abb. 11. Geräusch eines Staubsaugers

Gleichzeitig mit der Frequenzänderung des Trägers, die von Hand oder durch einen Synchronmotor erfolgen kann, wird die an den waagerecht ablenkenden Platten liegende Gleichspannung geändert, so daß jeder Frequenzeinstellung des Trägers eine bestimmte Horizontalablenkung des Leuchtflecks entspricht, während die Auslenkung nach oben den Energieinhalt des betreffenden Seitenbandausschnittes angibt. Bei einer Bandbreite des Filters von Δf läßt sich, da die Einschwingzeit $\frac{1}{\Delta f}$ ist, die Analyse des Bereiches von 0—20 kHz rund in $\frac{20\,000}{\Delta f} \cdot \frac{1}{\Delta f}$ sec durchführen, bei 20 Hz also in 50 sec. Der Schirm der Kathodenstrahlröhre ist nachleuchtend und ermöglicht, das Frequenzspektrum nach erfolgter Aufzeichnung noch eine gewisse Zeit zu betrachten. Man kann auch eine Daueraufzeichnung erhalten, indem man entweder vor dem Schirm der BRAUNschen Röhre eine Kamera mit geöffnetem Verschluß aufstellt und den Träger einmal durchlaufen läßt oder die Spannung am Eingang des Gleichrichters an einen Pegelschreiber nach NEUMANN legt. Abb. 8 zeigt die Außenansicht des Gerätes.

Im folgenden seien einige Beispiele für die Anwendungsmöglichkeiten der Apparatur gegeben. Die Abb. 9 und 10 zeigen Geigenklänge. Man verlangt in dieser Tonlage ($\sim$ 800 Hz) schon ein starkes Hervortreten des Grundtons. Der Klang nach Abb. 9 muß dementsprechend als gut und der Klang, wie ihn Abb. 10 zeigt, als schlecht bezeichnet werden. Das in Abb. 11 dargestellte Spektrum wurde vor der Einsaugöffnung eines Staubsaugers abgenommen. Es zeigt außer einigen einzelnen Linien ein breites Kontinuum mit flachen Resonanzstellen, hervorgerufen durch die in die verschiedenen Hohlräume des Staubsaugers einströmende Luft.

Zusammenfassung

Es wird ein Gerät zur automatischen Analyse beschrieben, das mit einer Trägerfrequenz (20—40 kHz) und einem mechanischen Bandfilter, bestehend aus zwei gekoppelten Tonpilzen, arbeitet. Aufbau und Wirkungsweise dieses Filters werden erläutert.

(Eingegangen am 31. Juli 1939)

Experimentelle Untersuchung eines quasiharmonischen Schwingers*)

Von Hanns Neusinger

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung der Technischen Hochschule Berlin

(Mit 12 Textabbildungen)

I. Einführung

Seit die Untersuchungen, die von der klassischen Methode der kleinen harmonischen Schwingungen ausgehen, einen gewissen Abschluß erreicht haben, wendet sich die Aufmerksamkeit der Forschung auf dem Gebiet der technischen Schwingungslehre stark den nichtharmonischen Schwingungserscheinungeu zu. Unter diesem Sammelbegriff wollen wir alle diejenigen periodischen Vorgänge verstehen, welche durch die harmonische Näherung nicht mehr genügend genau, unvollständig oder sogar falsch beschrieben werden.

Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b \cdot \frac{dy}{dx} + \nu^2 \cdot y = a \cdot \sin(\omega x), \tag{1}$$

die einen großen Teil der in der Technik auftretenden Schwingungsprobleme in ziemlich guter Annäherung beschreibt, ist ja nur ein sehr einfacher Sonderfall der Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} + \nu^2(x,y) \cdot y = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot x + \varphi_i), \tag{2}$$

welche die Schwingung eines einzelnen Systems mit zwei Energiespeichern beliebiger Eigenschaften beschreibt.

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nicht bekannt. Dagegen liegen viele und ausführliche Arbeiten über typische Sonderfälle der nichtharmonischen Schwingungen vor, deren Hauptvertreter sind: Das DUFFINGsche Problem, die Schüttelschwingungen nach MEISSNER und die Relaxationsschwingungen von VAN DER POL jun.

Ein Weg zur Gewinnung eines allgemeinen Überblicks über die mit der Differentialgleichung (2) zusammenhängenden Probleme hat sich über die in den letzten Jahren sehr vervollkommnete mathematische Behandlung der HILLschen Differentialgleichung aufgetan, da bekannt ist[1]), daß die Gleichungen nichtharmonischer Schwingungen, wenn sie nicht schon von vornherein diese Form besitzen, sich stets (vorausgesetzt, daß gewisse Konvergenzbedingungen erfüllt sind) auf solche der HILLschen Art

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda + \gamma \cdot \Phi(x)] \cdot y = 0, \tag{3}$$

wobei

$$\Phi(x+p) = \Phi(x),$$

umformen oder zurückführen lassen. Diese Eigenschaft verleiht der HILLschen Differentialgleichung eine grundlegende Bedeutung für die rechnerische Erfassung der gesamten nichtharmonischen Schwingungen.

Es wird aber auch in neueren Arbeiten immer häufiger auf Schwingungsprobleme aufmerksam gemacht, die schon ohne einen solchen Umformungskunstgriff auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten führen und die als quasiharmonisch bezeichnet werden. Außer den Erscheinungen, welche zuerst die Aufmerksamkeit auf diese Differentialgleichung lenkten: Die Schwingungen elliptischer Platten, die Mondbewegung im

*) Genehmigte Dissertation der Technischen Hochschule Berlin (Fakultät für Maschinenwesen).

[1]) C. L. KOBER, Die Selbsterregung von Schwingungen. Arch. Elektrotechn. 32 (1938), S. 581—608.

Schwerefeld der Erde unter dem störenden Einfluß der Sonnenanziehung und die Schüttelschwingungen im Kuppelstangenantrieb der elektrischen Lokomotiven werden von STRUTT[2]), FÖRSTER[3]), BARROW[4]) und DIESSELHORST[5]) viele Beispiele aufgezählt.

In zahlreichen Arbeiten[6]), [7]), [8]), [9]), [10]), [11]) wird die rechnerische Verfolgung dieser quasiharmonischen Schwingungen unter Zuhilfenahme der neueren Theorie der HILLschen Differentialgleichung erläutert. Insbesondere konnten bei Schwingungsproblemen, die bisher unter Vernachlässigung der Veränderlichkeit eines Teiles des Schwingers behandelt wurden, wesentlich neue Ergebnisse erzielt werden. Die durch TREFFTZ[10]) angeregten Untersuchungen über Drehschwingungen der Kurbelwellen von Brennkraftmaschinen sind hierfür ein gutes Beispiel[12]).

Auch die Behandlung von Aufgabenstellungen, die schon vorher mit Hilfe eines Näherungsverfahrens, z. B. dem von Lord RAYLEIGH, untersucht wurden, wird bei Anwendung der Theorie der HILLschen Differentialgleichung zum mindesten wesentlich klarer und durchsichtiger (vgl. DREYFUS[11])-FÖRSTER[3]); HIRSCH[13])-ERDÉLYI[7]), [8])), wenn nicht überhaupt erst dadurch Ergebnisse gefunden werden, die nicht im voraus vermutet werden konnten und in der näherungsweisen Lösung nicht enthalten waren (vgl. WINTER-GÜNTER[14])-ERDÉLYI[7])).

Infolge der von den verschiedensten Gebieten immer neu ausgehenden Anregungen wurde die Theorie der HILLschen Differentialgleichung (3) oft und eingehend behandelt und liegt in abgerundeter und klarer Form vor. Für den Fall, daß $\gamma \cdot \Phi(x) = 2h^2 \cdot \cos(2x)$, der MATHIEUschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda + 2h^2 \cdot \cos(2x)] \cdot y = 0, \tag{4}$$

sind sogar eine für die Berechnung derartiger quasiharmonischer Schwinger genügende Anzahl zahlenmäßiger Ergebnisse ermittelt und veröffentlicht worden[15]), [16]).

Die rein theoretisch ermittelten Aussagen dieser mathematisch-physikalischen Arbeiten über das Verhalten physikalischer Systeme, die der MATHIEUschen (oder der HILLschen) Differentialgleichung genügen, sind bisher nur für Sonderfälle und nur rein qualitativ versuchsmäßig nachgeprüft worden.

Die Arbeiten, welche bisher Aufgaben in diesem Zusammenhang durch Versuche beobachtend und messend mit einer über die harmonische Näherung hinausgehenden Genauigkeit bearbeiten (vgl. IV), stützen sich auf ältere mathematische Betrachtungsweisen und verzichten regelmäßig darauf, die zahlenmäßige Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch zu untersuchen.

---

[2]) M. J. O. STRUTT, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin, Springer 1932.

[3]) R. FÖRSTER, Über Schüttel- und Zitterschwingungen. Arch. Elektrotechn. 27 (1933), S. 307—321.

[4]) W. L. BARROW, Frequency modulation and the effects of a periodic capacity variation in a nondissipative oscillatory circuit. Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y. 21 (1933), S. 1182—1202.

[5]) H. DIESSELHORST, Über zitternde Bewegungen. Ann. Physik, 5. Folge (1938), Bd. 32, S. 205—210.

[6]) BALTH. v. d. POL und M. I. O. STRUTT, On the stability of the solutions of Mathieus equation. Phil. Mag. 5 (1928), S. 18—38.

[7]) A. ERDÈLYI, Über die rechnerische Ermittlung der Schwingungsvorgänge in Kreisen mit periodisch schwankenden Parametern. Arch. Elektrotechn. 29 (1935), S. 473—489.

[8]) A. ERDÈLYI, Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierenden Aufhängepunkt. 1. Mitteilung. Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 235—247. 2. Mitteilung ebd. 16 (1936), S. 171 bis 182.

[9]) M. I. O. STRUTT, Beugung einer ebenen Welle an einem Spalt von endlicher Breite. Z. Phys. 69 (1931), S. 597.

[10]) E. TREFFTZ, Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen. Aachener Vorträge aus dem Gebiet der Aerodynamik u. verw. Geb. Berlin 1930.

[11]) L. DREYFUS, Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Arch. Elektrotechn. 12 (1923), S. 38—59.

[12]) R. GRAMMEL, Die Schüttelschwingungen der Brennkraftmaschinen. Ing.-Arch. 6 (1935), S. 59 bis 68.

[13]) P. HIRSCH, Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 41—52.

[14]) H. WINTER-GÜNTER, Selbsterregung von Systemen mit periodisch veränderlichen Induktivitäten. Jb. drahtl. Telegr. 37 (1931), S. 172.

[15]) E. L. INCE, Tables of the Elliptic-cylinder Funktions; and Zeros and Turning Points of the Elliptic Cylinder Funktions. Proc. Roy. Soc. Edinb. 52 (1931/32), S. 355—433.

[16]) JAHNKE-EMDE, Funktionentafeln. Berlin, Leipzig, Teubner 1938.

II. Zielsetzung und Formulierung der Aufgabenstellung

Als Ziel dieser Arbeit war nun gesetzt, das Verhalten eines quasiharmonischen Schwingers der MATHIEUschen Art auf experimentellem Wege zu untersuchen. Insbesondere sind die Stabilitätsverhältnisse über einen möglichst weiten Bereich der Parameter λ und h^2 der MATHIEUschen Differentialgleichung zu klären und die auftretenden Bewegungsformen des Schwingers zu ermitteln.

Die Ergebnisse der Experimente sind auszuwerten und mit den auf Grund der theoretischen Nachrechnung des Schwingers gefundenen in Beziehung zu setzen und zu vergleichen. Die Genauigkeit der verwendeten Meßeinrichtung muß dabei gewährleisten, daß die den gefundenen Werten anhaftenden Fehler sich auf wenige Hundertteile beschränken, um den numerischen Vergleich nicht in Frage zu stellen.

Hieraus ergibt sich folgende Aufgabenstellung:

Es ist eine Versuchseinrichtung zu entwerfen und auszuführen, die es gestattet, einen quasiharmonischen Schwinger in möglichst allen Schwingungszuständen, d. h. für alle Werte λ und h^2 der ihn kennzeichnenden MATHIEUschen Differentialgleichung darzustellen und diese Parameter sowie die Ausschläge genau zu messen. An diesem Gerät sind soviel Messungen auszuführen, als nötig erscheinen, um den Gesamtbereich mit Sicherheit zu erfassen. Aus den gefundenen Meßwerten sind die etwa vorhandenen Unterschiede zwischen Rechnung und Versuch zu ermitteln und kritisch zu beurteilen.

III. Die Theorie der MATHIEUschen Differentialgleichung

Zur Kenntnis des Weges, auf welchem die rechnerischen Werte erhalten werden, die zum Vergleich herangezogen werden sollen, sei eine gedrängte Darstellung der Theorie der MATHIEUschen Differentialgleichung[2]), [7]), [17]) gegeben.

Die MATHIEUsche Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda + 2h^2 \cdot \cos(2x)] \cdot y = 0. \tag{4}$$

Nach dem Theorem von FLOQUET sind dann alle Teillösungen dieser Differentialgleichung von der Form:

$$y = e^{\mu 2x} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \cdot e^{jn2x}. \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2\mu \cdot e^{\mu 2x} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \cdot e^{jn2x} \\ &\quad + e^{\mu 2x} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n\, jn\, 2 \cdot e^{jn2x} \\ &= e^{\mu 2x} \sum a_n \cdot 2(\mu + jn) \cdot e^{jn2x} \Big|_{n=-\infty}^{n=+\infty} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\mu 2x} \sum a_n \cdot 4(\mu + jn)^2 \cdot e^{jn2x} \Big|_{n=-\infty}^{n=+\infty}. \tag{7}$$

Ferner gilt:

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j2x} + e^{-j2x}). \tag{8}$$

Werden nun (6), (7) und (8) in die Ausgangsgleichung (5) eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} &e^{\mu 2x} \cdot \Sigma a_n \cdot e^{jn2x} [4(\mu + jn)^2 + \lambda \\ &\quad + h^2 (e^{j2x} + e^{-j2x})] \Big|_{n=-\infty}^{n=+\infty} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

In dieser Gleichung müssen auch die Summen der verschiedenen Potenzen von n einzeln genommen gleich Null sein. Beachtet man, daß $e^{j2x} \cdot e^{(n-1)j2x} = e^{jn2x}$, so findet man für die Koeffizienten a_n die Beziehung:

$$\begin{aligned} &e^{j2nx} \cdot \{[4(\mu + jn)^2 + \lambda] \cdot a_n \\ &\quad + h^2 (a_{n-1} + a_{n+1})\} \Big|_{n=+\infty}^{n=-\infty}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Lösungen dieses Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ergibt sich durch Nullsetzen der aus den Koeffizienten der a_n gebildeten unendlichen Determinante.

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \frac{h^2}{4(\mu+j2)^2+\lambda} & 1 & \frac{h^2}{4(\mu+j2)^2+\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{4(\mu+j1)^2+\lambda} & 1 & \frac{h^2}{4(\mu+j1)^2+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{4(\mu+j0)^2+\lambda} & 1 & \frac{h^2}{4(\mu+j0)^2+\lambda} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

[17]) E. T. WHITTAKER und G. N. WATSON, A Course of Modern Analysis. Camb. Un. Press, 4. Aufl., 1927.

Wenn sowohl y als auch $\frac{d\,y}{d\,x}$ aus physikalischen Gründen stetig sein müssen, nehmen die Koeffizienten a_n mindestens mit der reziproken dritten Potenz der Ordnungszahl n ab (asymptotischer Satz). Die Beschränkung auf einige zentrale Reihen und Spalten dieser Determinante gibt also eine Näherungslösung.

Die Berechnung dieser Determinante kann durch die einer einfacheren, $\Delta\,(0)$, ersetzt werden, denn es läßt sich zeigen[17]), daß gilt:

$$\sin^2(j\pi\mu/2) = \Delta\,(0)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right), \tag{12}$$

wobei $\Delta\,(0)$ die durch Einsetzen von $\mu = 0$ in $\Delta\,(\mu)$ erhaltene Determinante bedeutet.

$$\Delta\,(0) = \begin{vmatrix} \frac{h^2}{\lambda+4(-4)} & 1 & \frac{h^2}{\lambda+4(-4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{\lambda+4(-1)} & 1 & \frac{h^2}{\lambda+4(-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{\lambda+4(-0)} & 1 & \frac{h^2}{\lambda+4(-0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{\lambda+4(-1)} & 1 & \frac{h^2}{\lambda+4(-1)} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Die Ausrechnung der Determinante (13) ergibt eine unendliche Reihe für $\Delta\,(0)$, welche, nach einer endlichen Gliederzahl abgebrochen, eine Näherungslösung liefert, mit deren Hilfe aus (12) der charakteristische Exponent μ berechnet werden kann. Dieses μ ist nun das gesuchte, welches die Determinante $\Delta\,(\mu)$ (11) zu Null werden läßt.

In bekannter Weise werden nun die Koeffizienten a_n dadurch ermittelt, daß die Unterdeterminanten der zentralen Zeile von $\Delta\,(\mu)$ gebildet werden. Diese neuen Determinanten ergeben die Werte der a_n wiederum um so genauer, je mehr Glieder der bei ihrer Ausrechnung entstehenden Reihe berücksichtigt werden.

Mit μ und a_n ist nun die Lösung (5) der Gl. (4) vollständig bekannt.

Die zahlenmäßige Berechnung dieser Reihen ist schwierig und mühsam, da die Konvergenz oft erst nach einer Umformung erreicht wird.

Für den wichtigen Fall, daß $Re\,(\mu) = 0$ ist und die Lösungen periodische (MATHIEUsche) Funktionen werden, sind Tafeln für die zusammengehörigen (charakteristischen) Werte λ und h^2 und für die a_n berechnet worden[15]), [16]), die weiter unten zum Vergleich mit den Versuchsergebnissen benutzt werden.

IV. Bisher veröffentlichte experimentelle Arbeiten

An Abhandlungen auf dem Gebiet der quasiharmonischen Schwingungen, die gemessene Versuchsergebnisse veröffentlichen, sind nur die Dissertation von K. E. MÜLLER[18]) und die Veröffentlichung von WINTER-GÜNTER[14]) zu nennen.

K. E. MÜLLER benutzt (allerdings schon 1919) das Modell eines Kuppelstangengetriebes, dessen Elastizität gegen Drehschwingungen mit der Kurbelstellung periodisch veränderlich ist, als Versuchsapparat. An diesem Modell werden durch Messen der Leistungsaufnahme und Ermittlung der Drehschwingungsform mit dem Stimmgabelverfahren beachtenswerte Ergebnisse erzielt. Die Schwingungserscheinungen, welche durch die schwankende Elastizität hervorgerufen werden, sind aber stark gestört durch Kopplungserscheinungen, auftretende Spiele im Schwingungssystem und Stichmaßfehler.

Außerdem wird als theoretische Grundlage, dem damaligen Stande entsprechend, die MEISSNERsche Gleichung[19]) benutzt, die im Gegensatz zu dem tatsächlichen Sachverhalt eine periodische sprungweise Änderung der Federkonstanten voraussetzt. Unter diesen Umständen ist natürlich nur eine geringe Übereinstimmung der Ergebnisse von Versuch und Rechnung zu erwarten, weswegen damals auch der Weg eines Modellversuchs beschritten wurde, um das Wesen der Schüttelschwingungen im Kuppelstangenantrieb zu klären.

WINTER-GÜNTER, der Versuche an einem elektrischen Schwingungssystem, bestehend aus Kapa-

[18]) K. E. MÜLLER, Über die Schüttelschwingungen des Kuppelstangenantriebs. Diss. E. T. H. Zürich 1919. Schw. Bauzeitg. 74 (1919, 2), S. 141—144.

[19]) E. MEISSNER, Über Schütterlerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Schw. Bauzeitg. 72 (1918, 2), S. 95—98.

zität und periodisch veränderlicher Selbstinduktion (durch eine zum Drehregler umgeschaltete Asynchronmaschine dargestellt) ausführt, beschränkt sich darauf nachzuweisen, daß eine Selbsterregung überhaupt stattfindet. Er benutzt zur Erklärung der Erscheinung eine Näherungstheorie nach Lord RAYLEIGH[20]) auf Grund derer nur ein einziger instabiler Bereich erwartet und zufällig auch beim Versuch erhalten wird.

Beide Arbeiten benutzen also ältere theoretische Unterlagen und ihre Ergebnisse sind nur teilweise und nur qualitativ eine Bestätigung der neueren nach Kap. III abgeleiteten theoretischen Aussagen.

V. Wahl der eigenen Versuchsanordnung

Zur Verwirklichung der unter II gestellten Aufgabe mußte eine Versuchsanordnung gefunden werden, die es gestattet, die in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter λ und h^2 in einem möglichst weiten Bereich zu verändern und sowohl die in die Schwingungsgleichung eingehenden Konstanten als auch die auftretenden Schwingungen genau zu messen und aufzunehmen.

Alle Schwingungsvorgänge, deren Eigenfrequenz nur von positiven skalaren Größen (Kapazität, Federkraft) abhängt, scheiden damit von vornherein aus, da das Verhältnis des veränderlichen Anteils dieser Größen zu ihrem Mittelwert, also $2\,h^2/\lambda$, höchstens den Wert 1 erreichen kann. (Die Differenz kann nämlich geringstens 0 werden.) An einem elektrischen Schwingungskreis mit periodisch veränderlicher Kapazität z. B. kann also nur der erste Oktant der Ebene der beiden Parameter untersucht werden.

Als ein Schwingungsgebilde mit wesentlich stärker veränderbaren Eigenschwingungszahlen erkennt man das starre physikalische Pendel Abb. (1), wenn man bedenkt, daß in dessen Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g \cdot e \cdot M}{J} \cdot \alpha = 0, \tag{14}$$

die in die Schwingungsebene fallende Komponente g des Erdbeschleunigungsvektors auftritt. Da diese Komponente zwischen einem positiven und einem negativen gleich großen Betrag verändert werden kann, wird hier das Verhältnis $0 \leq 2\,h^2/\lambda \leq \infty$.

Sorgt man dafür, daß sich die Schwingungsebene eines Pendels dauernd gleichmäßig gegen die Richtung der Schwere verdreht, so wird die in die Schwingungsgleichung eintretende Komponente der Erdbeschleunigung: $g = g_0 \cdot \cos(\omega t)$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Wird nun noch eine zusätzliche Rückstellfeder angebracht, welche das Drehmoment $c \cdot \alpha$ ausübt, so lautet die Differentialgleichung dieses Schwingers:

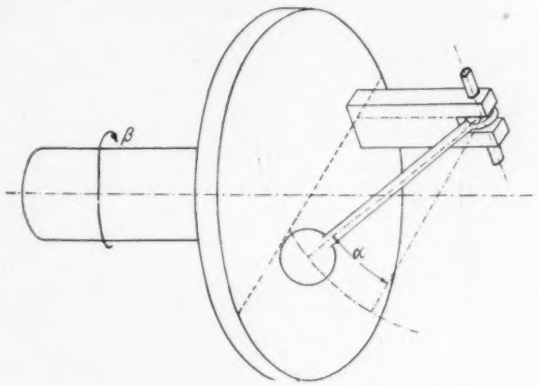


Abb. 1. Pendel mit gegen die Schwererichtung geneigter Schwingungsebene

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left[\frac{c}{J} + \frac{g \cdot \cos(\omega t) \cdot e \cdot M}{J}\right] \cdot \alpha = 0, \tag{15}$$

die vermöge $\omega t = 2\bar{t}$ übergeht in

$$\frac{d^2\alpha}{d\bar{t}^2} + \left[\frac{c \cdot 4}{J \cdot \omega^2} + \frac{4 \cdot g \cdot e \cdot M}{\omega^2 \cdot J} \cdot \cos(2\bar{t})\right] \cdot \alpha = 0, \tag{16}$$

eine MATHIEUsche Differentialgleichung, bei der die absolute Größe der Parameter mit $0 < \omega < \omega_{max}$ und ihr Verhältnis mit $0 < c < c_{max}$ fast den ganzen ersten Quadranten der Ebene der Parameter bestreicht, wobei in dem nicht erfaßten Gebiet $\omega > \omega_{max}$ keine Instabilitäten mehr vorkommen und das Gebiet $c > c_{max}$ die in unmittelbarer Nähe des harmonischen Falles gelegenen uninteressanten Bewegungsformen umfaßt.

VI. Ableitung der Bewegungsgleichung

In folgendem werde die Bewegungsgleichung dieses zu untersuchenden quasiharmonischen Pendels streng hergeleitet. Hierzu sei vom Prinzip von LAGRANGE ausgegangen.

[20]) Lord RAYLEIGH, Theory of Sound. London, Mac Millan 1926.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 wird dies durch folgenden Ansatz ausgedrückt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{d\alpha}{dt}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0. \tag{17}$$

Es bedeuten L die kinetische Energie und V die potentielle Energie des Pendels als Funktion von α und β.

Die potentielle Energie ist gleich der negativen Arbeit der auf das Pendel einwirkenden äußeren Kräfte

$$V = -\Sigma \mathfrak{K} \cdot d\,s$$
$$V = -g \cdot M \cdot \cos\beta \cdot [(h-e) + e(1-\cos\alpha)] + \frac{c \cdot \alpha^2}{2}. \tag{18}$$

c = Richtmoment einer am Pendel angebrachten Zusatzfeder

$$L = \sum \frac{1}{2}\, dm\, \mathfrak{v}^2. \tag{19}$$

Hierbei ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$.
Da $\mathfrak{v}_1$ auf $\mathfrak{v}_2$ senkrecht steht, ergibt sich:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Aus der Abbildung erkennt man, daß

$$v_{1i} = \sqrt{r_i^2 + a_i^2}\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

und

$$v_{2i} = \sqrt{(\cos\alpha \cdot r_i - a_i \cdot \sin\alpha - h)^2 + b_i^2}\,\frac{d\beta}{dt}$$

$$L = \frac{1}{2}\,\Sigma\, dm \left[(r_i^2 + a_i^2)\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \{(\cos\alpha \cdot r_i - a_i \sin\alpha - h)^2 + b_i^2\}\cdot\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right]$$

$$L = \frac{1}{2}\,(J_{x_1 y_1} + J_{y_1 z_1})\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\Sigma\, dm\,[\cos^2\alpha \cdot r_i^2 + a_i^2 \sin^2\alpha + h^2 - 2\,a_i r_i \cos\alpha \cdot \sin\alpha - 2\,r_i h \cos\alpha + 2\,a_i h \sin\alpha + b_i^2]\cdot\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2.$$

Die Indices der planaren Massenträgheitsmomente J geben die Achsen an, die in der Bezugsebene der Trägheitsmomente liegen. Zur Abkürzung werde gesetzt: $J_{x_1 y_1} = J_1$; $J_{y_1 z} = J_2$; $J_{x_1 z} = J_3$ und $J_{x_1 y_1 / y_1 z} = J_{12}$ (Deviationsmoment). Außerdem ist: $\beta = \omega t$, also $\frac{d\beta}{dt} = \omega$.

Hiermit ist weiterhin:

$$L = \frac{1}{2}\Big[(J_1 + J_2)\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \{J_1 \cdot \cos^2\alpha + J_2 \cdot \sin^2\alpha + M h^2 - 2\,J_{12}\cos\alpha \cdot \sin\alpha - 2\,M e h \cdot \cos\alpha + 2\,M e_2 h \cdot \sin\alpha + J_3\}\,\omega^2\Big]. \tag{20}$$

Hieraus errechnet man:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{d\alpha}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left[(J_1 + J_2)\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\right] = J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \tag{21}$$

J = Massenträgheitsmoment in bezug auf die Pendelachse.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \big[-J_1 \cos\alpha \cdot \sin\alpha + J_2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha - J_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + M e h \sin\alpha + M e_2 h \cos\alpha\big]\cdot\omega^2. \tag{22}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -g \cdot M \cdot e \cdot \cos(\omega t)\cdot\sin\alpha + c\cdot\alpha. \tag{23}$$

Der Abstand des Schwerpunkts e_2 von der $y_1 z$-Ebene ist, aus Symmetriegründen gleich 0

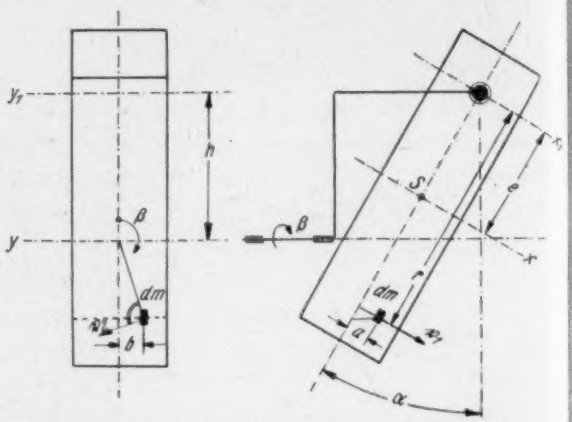


Abb. 2. Quasiharmonisches Pendel (schematisch) dm Teilchen der Pendelmasse, α Pendelausschlagwinkel, β Drehwinkel der Pendelebene, $\mathfrak{v}_1$ Geschwindigkeit von dm um die Achse der α, $\mathfrak{v}_2$ Geschwindigkeit von dm um die Achse der β, a Abstand der dm von der Ebene y—, b Abstand der dm von der Ebene x—z, h Senkrechter Abstand der α-Achse von der β-Achse, e Abstand des Pendelschwerpunkts von der Pendelachse

(Abb. 2). Die Ausdrücke (21), (22) und (23) können nun in die Gl. (17), den Ansatz nach LAGRANGE, eingeführt werden.

Es ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \big[(J_1 - J_2)\cos\alpha \cdot \sin\alpha + J_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - M e h \cdot \sin\alpha\big]\omega^2 - g \cdot e \cdot M \cdot \cos(\omega t)\cdot\sin\alpha + c\cdot\alpha = 0. \tag{24}$$

Das Pendel werde nun so ausgeführt, daß die durch die Achse und den Schwerpunkt gehende Ebene $y_1 z$ Symmetrieebene ist. Damit wird $J_{12} = 0$. Um den Rest der Klammer bei ω^2 für kleine Winkel α (also $\cos\alpha = 1$) zum Verschwinden zu bringen, muß gelten:

$$[(J_1 - J_2) - M \cdot e \cdot h] \cdot \sin\alpha = 0$$
$$M \cdot \sin\alpha\,[k_1^2 - k_2^2 - e \cdot h] = 0\,.$$

Bei gegebenen Trägheitsradien k_1 und k_2 und Schwerpunktsabstand e errechnet sich die Aufhängehöhe des Pendels zu:

$$(25) \qquad h = \frac{k_1^2 - k_2^2}{e}\,.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so lautet die Bewegungsgleichung bei kleinen Winkeln α:

$$(26) \quad J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + [c - g \cdot e \cdot M \cdot \cos(\omega t)] \cdot \alpha = 0\,.$$

Mit $\omega t = 2\bar{t}$, also $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{\omega}{2} \cdot \frac{d\alpha}{d\bar{t}}$

und $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\omega^2}{4} \cdot \frac{d^2\alpha}{d\bar{t}^2}$ erhält man:

$$(27) \quad \frac{d^2\alpha}{d\bar{t}^2} + \left[\frac{4 \cdot c}{\omega^2 \cdot J} - \frac{4 \cdot g \cdot e \cdot M}{\omega^2 \cdot J} \cdot \cos(2\bar{t})\right] \cdot \alpha = 0\,.$$

Zum Anschluß an die gebräuchliche Bezeichnungsweise setze:

$$(28) \quad 4c/\omega^2 J = \lambda \text{ und } 4 \cdot g \cdot e \cdot M/\omega^2 J = 2h^2,$$

(Beachte, daß dieser Parameter h nicht identisch mit Aufhängehöhe h)

womit sich wieder (4) ergibt.

VII. Beschreibung der ausgeführten Anlage

Abb. 3 zeigt eine Aufnahme der Versuchsanlage und Abb. 4 eine Werkstattzeichnung des Geräts.

Die Abmessungen des Pendels (s. Abb. 4, Schnitt A—B) sind so gewählt, daß die Schwingungsdauer nicht allzu lang wird. In Schulterkugellagern, die durch die Herstellerfirma besonders fehlerfrei ausgesucht wurden, ist es in einem Pendelgehäuse gelagert, dessen Lagerbohrung auf einer Lehrenbohrmaschine genau senkrecht zur Welle des Gehäuses hergestellt ist. Diese Welle ist mit Kegelrollenlagern und Nachstellvorrichtung ausgerüstet, so daß die Lagerung vollständig spielfrei erfolgt. Hierdurch sollen Störungen der Pendelbewegung durch Erschütterungen des Pendelgehäuses innerhalb seines Lagerspiels vermieden werden. Der Abstand der Pendelachse von der Drehachse des Gehäuses wurde nach Formel (25) aus den geometrischen Abmessungen errechnet.

Der konstante Anteil der Rückstellkraft des Schwingers wird durch eine auswechselbare Blattfeder aus Bandstahl ausgeübt, die oben genau in der Verlängerung der Pendelachse eingespannt ist und unten zwischen zwei Spitzen gleiten kann.

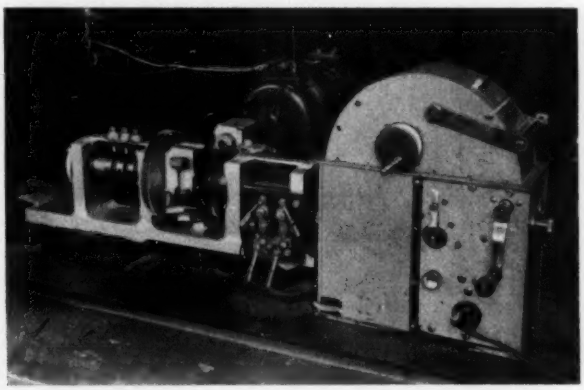


Abb. 3. Quasiharmonischer Schwinger mit Antriebsmaschine und Aufnahmekamera

Die Beobachtung und Aufzeichnung der Pendelbewegung erfolgt optisch über ein Umkehrprisma (Abb. 5).

Läßt man nämlich ein Lichtbündel aus einer Blende durch ein solches Prisma fallen und dreht dieses dann um seine optische Achse, so sind die austretenden Lichtstrahlen um den doppelten Winkel verdreht. Gegenüber einem Schirm, der mit der doppelten Prismendrehzahl rotiert, steht das Bild des Bündels also still. Denkt man sich umgekehrt das Licht von der Achse eines rotierenden Teils ausgehend, so steht nun das Bild auf einem ruhenden Schirm still, wenn sich wieder das Prisma mit der halben Winkelgeschwindigkeit dreht.

Dies wird nun dazu benutzt, um den Drehwinkel eines in der optischen Achse auf dem Pendel angeklebten Spiegelchens mit einem Lichtstrahl in einem feststehenden Aufnahmegerät fortlaufend aufzuzeichnen. Vor der linienförmigen Lichtquelle in der Kamera der Abb. 4 ist eine Linse so angebracht, daß das Bild des Leuchtfadens durch das Prisma, über den Spiegel und wieder durch das Prisma gehend, auf dem lichtempfindlichen Papier scharf entworfen wird. Kurz vor dem Papier ist eine Zylinderlinse angebracht, die diesen Lichtstrich zu einem Punkt zusammenzieht.

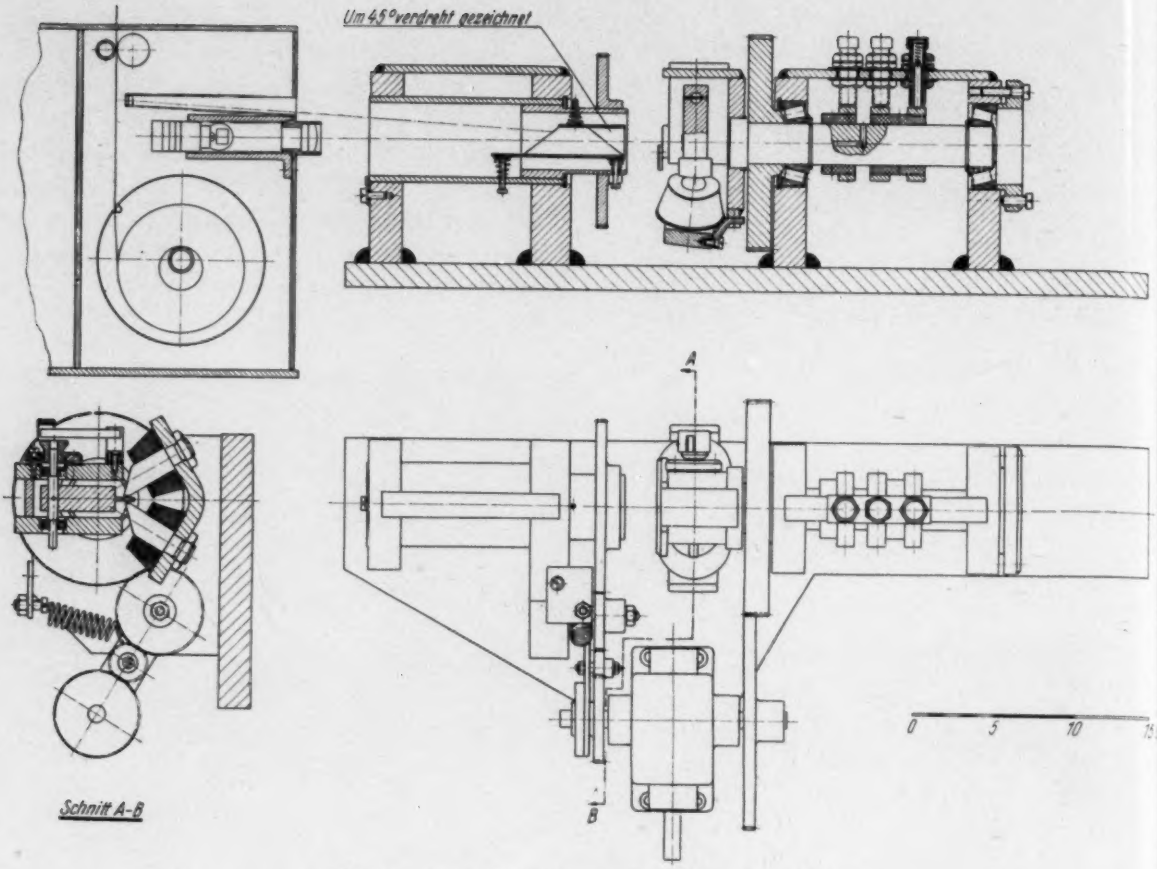


Abb. 4. Werkstattzeichnung des Versuchsgeräts

Über ein Zahnradgetriebe wird das Prisma zwangsläufig mit der halben Pendelgehäusedrehzahl bewegt. Das Bild des Leuchtfadens auf dem Spiegel rotiert also mit diesem synchron, und das zurückgeworfene Bild steht wiederum in bezug auf das Aufnahmegerät still. Bildet die Spiegelnormale einen Winkel mit der optischen Achse, so wird der Lichtstrahl um den doppelten Winkel abgelenkt zurückgeworfen und beschreibt einen Kegelmantel um die optische Achse. Der Durchgang durch das sich mit halber Geschwindigkeit bewegende Prisma bewirkt wieder, daß der austretende Lichtstrahl gegenüber der feststehenden Kamera stillsteht, während der Ablenkungswinkel erhalten bleibt. Die Drehwinkel des Pendels werden nun als waagerechte Ablenkungen aufgezeichnet, wenn durch eine Verdrehung des Spiegels der Lichtstrahl bis in das Bildfenster gehoben wurde.

In dem Aufnahmegerät befinden sich zwei elektromagnetische Zeitmarkengeber, die bei Stromdurchgang mit einer auf dem Anker angebrachten Fahne zwei Lichtstrahlen an den Rändern des lichtempfindlichen Papiers unterbrechen. Die eine ergibt durch Anlegen an die 50periodige Netzspannung Zeitmarken in Abständen von $^1/_{100}$ sec, während die andere über den auf der Pendelgehäusewelle sitzenden zweiteiligen Unterbrecher die Umdrehungen des Pendelgehäuses anzeigt.

Der Antrieb der Anordnung erfolgt über Zahnräder und ein Schneckengetriebe 1 : 12 von einem Einankerumformer aus (Abb. 6).

Der Anker der Antriebsmaschine wird gleichstromseitig in WARD-LEONARDschaltung von einem mit konstanter Drehzahl laufenden Gleichstromerzeuger gespeist, dessen Erregerleistung über einen Spannungsteiler von der spannungsgeregelten 220 Volt-Hausbatterie geliefert wird. Die Erregung mit konstant 220 Volt für den Einankerumformer wird ebenfalls diesem Netz entnommen. An der Wechselstromseite des Umformers, die eine Wechselspannung liefert, deren Frequenz der Drehzahl direkt proportional ist, liegt ein Frequenz-

messer, mit dem die Drehzahl des Pendelgehäuses genau festgestellt wird.

Der Frequenzmesser besteht aus einem polarisierten Telegraphenrelais, das bei Erregung mit der zu messenden Frequenz dauernd bei einer Halbperiode einen Kondensator aus der Batterie voll auflädt und bei der nächsten Halbperiode über ein Präzisionsinstrument wieder entlädt.

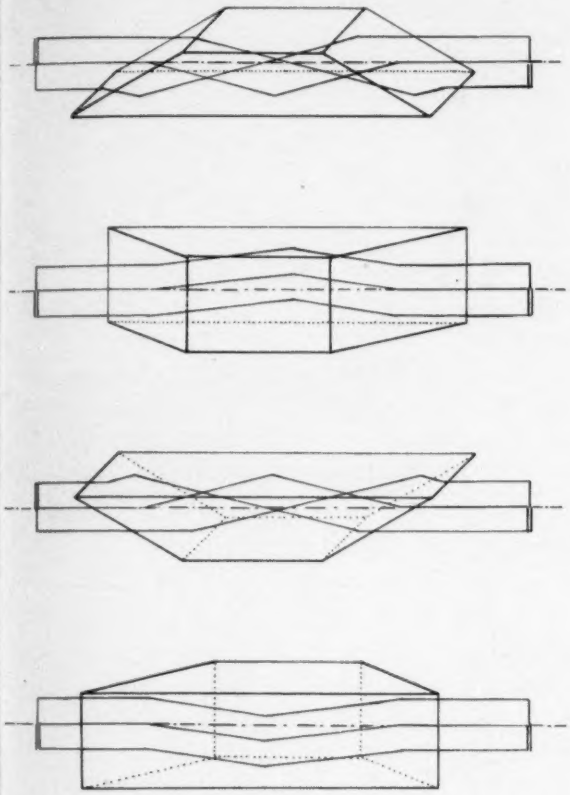


Abb. 5. Wirkungsweise eines Umkehrprismas

Das Instrument mißt den Mittelwert dieser Stromstöße (Q = Ladungsmenge eines Stromstoßes)

$$I = \frac{\int_{t=0}^{t=t} i\,dt}{t} = \frac{t \cdot f \cdot Q}{t} = Q \cdot f, \tag{29}$$

welcher der Frequenz f des Wechselstroms direkt proportional ist, da die während einer Halbperiode fließende Elektrizitätsmenge Q immer konstant gleich der Kondensatorladung bei der benutzten Batteriespannung ist. Vorausgesetzt ist, das die Lade- und Entladezeiten klein sind gegen die Dauer einer Halbperiode, was durch Aufnehmen von Oszillogrammen sichergestellt wurde.

Eingestellt wird der Frequenzmesser vor jeder Messung mit der Meßfrequenz von 50 Hz. Zur Ausschaltung der von der Resonanz des Instruments mit der Frequenz der Stromstöße, von Kontaktprellungen und ähnlichen herrührenden

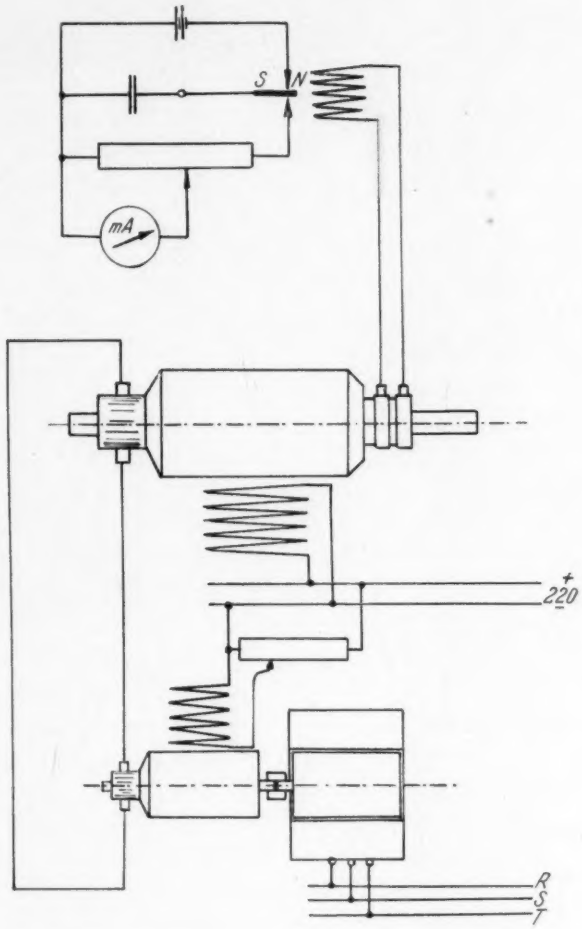


Abb. 6. Schaltung von Antrieb und Frequenzmessung

Fehlern wurde eine Eichkurve aufgenommen (s. Kap. VIII).

Bei den Versuchen erwies es sich als nötig, eine während des Betriebs veränderbare Dämpfung anzubringen, um zu große Ausschläge wieder verringern zu können. Dazu wurde ein Elektromagnet so am Pendelgehäuse befestigt, daß die Fahne des Pendelkörpers, welcher ganz aus Kupfer besteht, in das konzentrierte Feld des Magneten eintaucht und die Bewegung nun durch elektrische Wirbelströme gedämpft wird. Die Erregerspannung von maximal 60 Volt (1,5 Amp.) wurde über Schleifringe von einem

Spannungsteiler aus zugeführt. Beim freischwingenden Pendel ohne Zusatzfeder konnte so eine fast aperiodische Dämpfung erreicht werden.

VIII. Durchführung der Versuche und Meßergebnisse

Vor Inbetriebnahme der Versuchsanordnung waren noch zur Sicherung des einwandfreien Arbeitens einige vorbereitende Arbeiten vorzunehmen:

Wesentlich für das einwandfreie Arbeiten des Apparats ist das Einrichten seiner Drehachse in eine horizontale Ebene. Dies wurde mit einer Präzisionswasserwaage ausgeführt, die auf ein in der Bohrung des noch nicht zusammengebauten Geräts liegendes genaues Richtlineal aufgesetzt wurde. Die Genauigkeit dieser Einstellung wurde vor den einzelnen Versuchen dadurch überprüft und verbessert, daß das in seinem Schwingungsmittelpunkt zum Stillstand gekommene Pendel durch Drehen des Pendelgehäuses wiederholt in seine obere labile Gleichgewichtslage gebracht wurde, um dann festzustellen, ob es gleich häufig nach beiden Richtungen umfällt.

Das Prisma muß durch Einstellen an den Stellschrauben so justiert werden, daß seine optische Achse mit der Drehachse des Rohres, welches es umschließt, übereinstimmt.

Diese Einstellung geschah derart, daß das Pendel in seiner Mittellage festgestellt wurde und die bei Drehung des Apparats nun auftretende verschlungene Bewegung des Lichtzeigers durch systematisches Nachstellen an den Stellschrauben auf ein Minimum beschränkt wurde.

Es bleibt ein Restschlag übrig, der sich dadurch erklärt, daß das Prisma den Strahlengang wie eine schräg gestellte planparallele Platte verzerrt. Deswegen erscheint, durch das Prisma gesehen, eine kreisförmige Bewegung als Ellipse, so daß durch die Prismenanordnung zwar die Lichtzeigerdrehung zum Stillstand gebracht wird, aber der Ausschlag um den geringen Betrag der Exzentrizität der Ellipse schwankt. Dieser Fehler ist zahlenmäßig klein und kann nach Größe und Phase als Apparatekonstante festgestellt und aus den Diagrammen eliminiert werden.

Um die Frequenzmessung bis auf die Ablesegenauigkeit des Präzisionsinstruments sicherzustellen, wurde eine Eichkurve aufgenommen.

Hierzu wird die Zeitmarke von $^1/_{100}$ sec und die Umdrehungsmarke des Pendelgehäuses bei verschiedenen Drehzahlen zusammen auf dem Papierstreifen aufgezeichnet und dabei die vom Frequenzmesser angezeigte Frequenz abgelesen. Aus der Aufnahme kann die tatsächliche Drehfrequenz mit der zehnfachen Ablesegenauigkeit des Instruments ausgezählt werden. Diese Aufnahmen wurden mehrmals über den ganzen Frequenzbereich ausgedehnt, um durch Mittelwertbildung die zufälligen Ablesefehler auszuschalten. Die Abb. 7 zeigt die Abweichungen der angezeigten Frequenz in Abhängigkeit von der tatsächlichen Apparatedrehzahl.

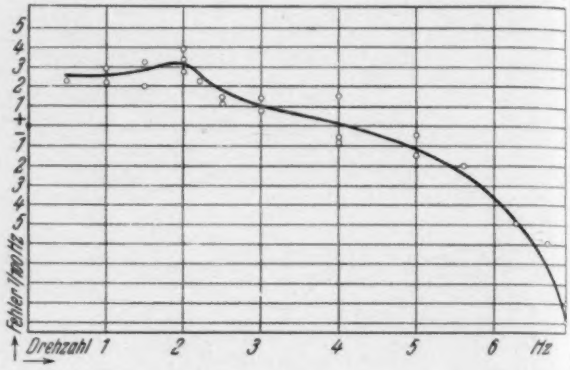


Abb. 7. Experimentell ermittelte Eichkurve des Frequenzmessers

Aus den gleichen Zahlenwerten, die zur Errechnung der nach Gl. (25) erforderlichen Aufhängehöhe des Pendels benutzt wurden, kann auch die Schwingungsdauer des Pendels ausgerechnet werden.

$$h = \frac{k_1^2 - k_2^2}{e} \qquad T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{g \cdot e}}.$$

Diese Rechnung ergibt $T = 0{,}349$ sec. Die Aufnahme des Ausschwingvorgangs ergab im Mittel genau den gleichen Wert. Die Streuung der Ergebnisse war $\pm\, 0{,}0015$ sec. Hiermit ist auch die Richtigkeit der zur Berechnung der Aufhängehöhe verwendeten rechnerisch erhaltenen Zahlenwerte experimentell bestätigt.

Experimentell kann auch die richtige Einhaltung der Bedingung $J_{12} = 0$ durch einen Versuch bei hohen Drehzahlen festgestellt werden, wobei alle Glieder mit ω^2 große Werte annehmen. Zeigt hier der Lichtzeiger eine konstante einseitige Ablenkung, so ist $J_{12} \neq 0$, was durch eine geringe Änderung der Massenverteilung beseitigt werden kann. In vorliegendem Fall wurde nur die Schraube an der oberen Federeinspannung, die aus Magnewin bestand, gegen

eine eiserne ausgetauscht, was sich in der Schwingungsdauer gar nicht bemerkbar machte.

Ebenfalls bei diesen hohen Drehzahlen wurden Störkräfte festgestellt, die von dem großen Zahnrad ausgehend, sich in einem Zittern des Lichtzeigers bemerkbar machten, aber nach Einbau eines Zahnrades aus Novotext vollständig verschwunden waren.

Nach Ausführung dieser Vorarbeiten wurden die einzelnen Versuche nun in folgender Weise durchgeführt:

Nachdem die waagerechte Lage der Apparateachse nachgeprüft und berichtigt ist, wird eine Feder eingespannt und die Spitzen derartig eingestellt, daß 0,1—0,15 mm Spiel bleibt und die Mittelpunkte der Rückstellkräfte von Feder und Pendel übereinstimmen. Bei starken Federn wird diese Übereinstimmung dadurch festgestellt, daß die Pendelruhelage in hängender und stehender Stellung übereinstimmt. Bei schwachen Federn muß die Häufigkeit des Umfallens aus der stehenden labilen Stellung nach beiden Seiten gleich groß sein.

Durch Einstellen des Pendelgehäuses in den Winkel β, bei dem die Rückstellkraft des Pendels gerade entgegengesetzt gleich groß derjenigen der Feder ist, also die gesamte Pendelanordnung keine Rückstellkraft mehr besitzt, können Unregelmäßigkeiten, wie verschiedene Federung für beide Ausschlagsrichtungen oder Verklemmungen erkannt und beseitigt werden.

Zur Messung der Konstanten des nun eingestellten Schwingungssystems wird das Pendel in genau senkrecht hängender Lage zweimal bis zum Vollausschlag ausgelenkt und die schwach gedämpfte Ausschwingbewegung aufgezeichnet. Hieraus wird die Schwingungsdauer T ausgezählt und dann ermittelt:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \nu^2 = \frac{c}{J} - \frac{g \cdot e \cdot M \cdot \cos(\omega t)}{J}$$

bei $\omega t = \beta = 180^0$.

Da $\frac{A\nu^2}{2} = g \cdot e \cdot M \cdot 1/J$ aus dem Ausschwingversuch für das Pendel ohne Feder bekannt ist, kann nun c/J ermittelt werden. Nun sind in der Differentialgleichung für das quasiharmonische Pendel (27) alle Konstanten bis auf ω bekannt, welches am Frequenzmesser abgelesen werden kann.

Durch Verändern von ω wird die Größe der Parameter (28) kontinuierlich geändert, während ihr Verhältnis durch den Wert von c festgelegt ist.

Durchfährt man die Drehzahlreihe von hohen zu niedrigen Werten, so steht das Pendel zunächst ruhig beim Ausschlag 0 und Ausschläge, die durch Anstoßen herbeigeführt werden, gehen in gedämpften Schwingungen in die Ruhelage zurück. Von dem Erreichen einer bestimmten Drehzahl an klingen derartige Störungen nicht mehr ab, sondern schaukeln sich im Gegenteil noch auf. An der Grenze zwischen dem gedämpften und dem angefachten Drehzahlbereich gibt es eine Drehzahl, bei der die Bewegung des quasiharmonischen Pendels gerade rein periodisch wird, und die Amplitude konstant bleibt. Die Lösung der für diese Drehzahl geltenden Schwingungsdifferentialgleichung, die von der Form (5) sein muß, hat also einen charakteristischen Exponenten μ, dessen reeller Anteil gleich Null ist.

Geht man mit der Drehzahl nun noch weiter hinunter, so findet man wieder einen Bereich, in dem Ausschläge, welche durch einmalige Störungen herbeigeführt werden, abklingen. Auch hier ergibt sich wieder an der Grenze des Bereichs eine rein periodische Funktion der Zeit als Bewegungsform. Gegen kleiner werdende Drehzahlen häufen sich diese instabilen Bereiche immer mehr und werden auch immer schmaler, so daß im günstigsten Fall wegen der, zwar möglichst gering gehaltenen Ungleichförmigkeit des Antriebs, gerade noch der siebente instabile Bereich mit genügender Konstanz eingestellt und beobachtet werden kann.

Die Anfangsamplitude, deren Größer- oder Kleinerwerden die Grenze zwischen Anfachung und Dämpfung angibt, wurde bei allen Versuchen gleich groß gewählt. Auch bei der Auszählung der Schwingungsdauer wurden nur die Schwingungen bis zum Erreichen dieser Amplitude benutzt, um den Einfluß einer schwachen Ausschlagabhängigkeit der Schwingungsdauer, herrührend von dem Spiel der Feder in ihren Spitzen, auszuschalten.

In der Abb. 8 sind sowohl die so ermittelten Werte eingetragen als auch diejenigen, welche

sich durch Ausrechnen der aus der Determinante (13) entwickelten Reihen ergeben. Diese rechnerischen Werte, welche durch Linien verbunden sind, wurden den Tafeln von E. L. INCE[15]) entnommen.

Die Übereinstimmung mit den auf Grund der Versuche gefundenen Werten ist augenscheinlich.

Damit ist es gelungen, eine Reihe der von der Theorie berechneten instabilen Bereiche nicht nur darzustellen und zu beobachten, sondern

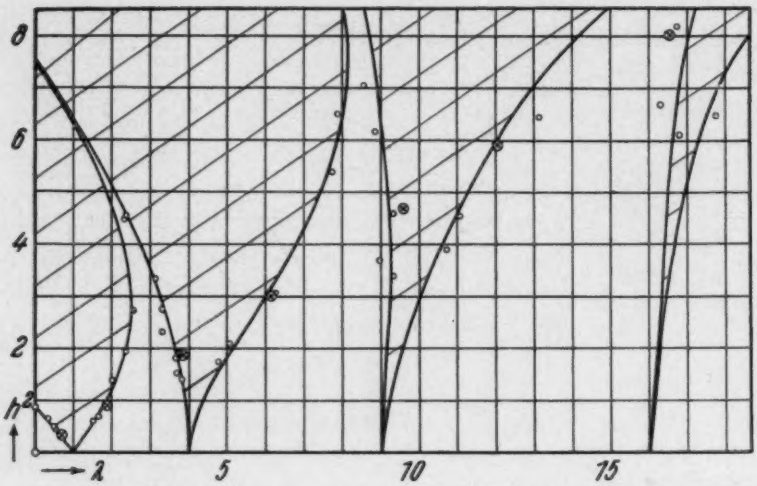


Abb. 8. Stabilitätsverhältnisse der MATHIEUschen Differentialgleichung —— Grenzkurven nach INCE[15]); ○ gemessene Punkte der Grenzkurven; ⊗ Punkte, die zu den MATHIEUschen Funktionen der Abb. 9, 10, 11 und 12 gehören. Die instabilen Gebiete sind schraffiert

auch den Verlauf ihrer Grenzen so genau zu messen, daß ein Vergleich mit den theoretischen Werten zahlenmäßig möglich ist und damit die Aussagen der Theorie durch das Experiment zu bestätigen.

Für die an den Grenzen der instabilen Bereiche auftretende periodische Pendelbewegung (MATHIEUsche Funktionen) bedeutet die gefundene Übereinstimmung, daß ihre Periodendauer bis auf den kleinen Fehler gleich der sich aus der theoretischen Berechnung ergebenden ist.

Bei diesen Drehzahlen, mit denen sich rein periodische Funktionen ergeben, wurden Aufnahmen hergestellt, von denen einige in den Abbildungen 9, 10, 11 und 12 zusammengestellt sind. Die abgebildeten Aufnahmen wurden alle an dem gleichen Schwingungssystem, also ohne Auswechseln der Feder, gemacht. Das Verhältnis $\lambda/2\,h^2$ war dadurch immer konstant, nämlich 0,9 und die verschiedenen Formen gehen nur durch Verändern der Drehzahl (Umdrehungsmarke am oberen Rande des Diagrammstreifens!) auseinander hervor. Die Punkte, die diesen Aufnahmen entsprechen, sind in der Abb. 8 mit ⊗ eingetragen.

Für die je zwei Funktionen der ersten und zweiten Ordnung sind die Schwingungsformen, die sich bei der theoretischen Berechnung ergeben, in die neue Auflage der Funktionentafeln[16]) aufgenommen worden. Die Werte der höheren Funktionen sind von E. L. INCE[15]) berechnet und veröffentlicht.

Diese berechneten Werte sind bei den entsprechenden Schwingungsaufnahmen mit eingezeichnet worden. Außer der Übereinstimmung der Periodenlänge, die sich mit größerer Genauigkeit schon bei der Bestimmung der charakteristischen Werte von λ und h^2 ergibt, erkennt man nun, daß auch der Schwingungsverlauf sich weitgehend mit dem vorausberechneten deckt.

Die noch bestehenden Abweichungen erklären sich daraus, daß die Aufnahmen infolge des beschränkten Gesichtswinkels des verwendeten Umkehrprismas bei einem ziemlich geringen Größtausschlag der Pendelbewegung erfolgen mußte. Hierdurch tritt der Einfluß der geschwindigkeitsunabhängigen COULOMBschen Reibung zu stark hervor, welcher sich so auswirkt, als wäre eine mit dem Schwingungsausschlag veränderliche geschwindigkeitsproportionale Reibung vorhanden. Bei der Ableitung der Theorie wurde aber vorausgesetzt, daß der Reibungsbeiwert gleich Null sei. Es läßt sich zwar mit einer ähnlichen Überlegung, wie die zur Feststellung der praktischen Unabhängigkeit der Frequenz eines harmonischen Schwingers von einer kleinen Dämpfung zeigen (s. Abschnitt IX a 1), daß auch in dem vorliegenden Fall eine kleine geschwindigkeitsproportionale Reibung vernach-

lässigbar wenig ausmacht. Besteht aber eine konstante Reibung, so ergibt sich bei Umrechnung der auftretenden Dämpfungskräfte auf geschwindigkeitsabhängige Reibung ein Reibungsbeiwert, der für kleine Geschwindigkeiten (also kleine Größtausschläge und große Auslenkungen) unendlich groß wird. Die Schwingungsform in diesen stark gedämpften Teilen unterscheidet sich dann merklich von der bei Abwesenheit von Reibung auftretenden.

Die geringen gefundenen Abweichungen von der theoretischen Schwingungsform erklären sich hierdurch völlig. Bei einem Neubau der Versuchsapparatur zu der im Abschnitt X vorgeschlagenen Verwendung können diese Abweichungen ausgeschaltet werden, indem an Stelle des Prismas eine Spiegelanordnung gewählt wird, die einen größeren Ausschlag aufzunehmen gestattet, wobei außerdem durch eine Vergrößerung der Pendelmasse der Einfluß von Reibungen überhaupt verkleinert werden kann.

IX. Untersuchung der Meßgenauigkeit

Die Fehler, die den erzielten Meßergebnissen anhaften, sind ihrer Entstehungsursache nach in zwei Gruppen einzuteilen. Einerseits ergeben sich Fehler (Gruppe a) durch Abweichungen der tatsächlichen Schwingungssystemeigenschaften von den in der Ableitung der Bewegungsgleichung angenommenen, wie z. B. das unvermeidliche Vorhandensein von Spiel in den Lagern im Gegensatz zu der Annahme, daß das Pendel dem Gehäuse gegenüber nur die Möglichkeit einer Drehbewegung um eine mathematische Achse be-

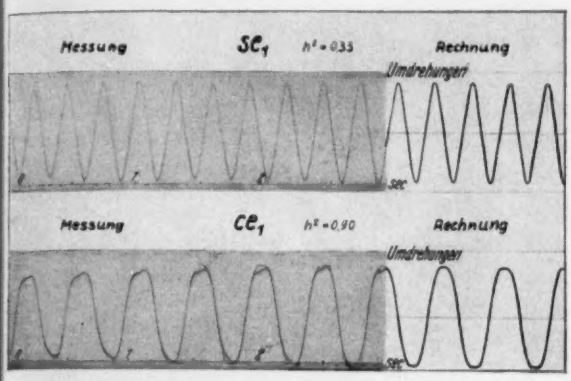


Abb. 9. Schwingungsverlauf an den Grenzen des ersten instabilen Bereichs

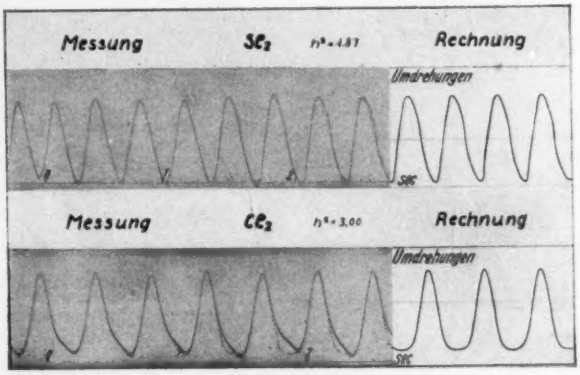


Abb. 10. Schwingungsverlauf an den Grenzen des zweiten instabilen Bereichs

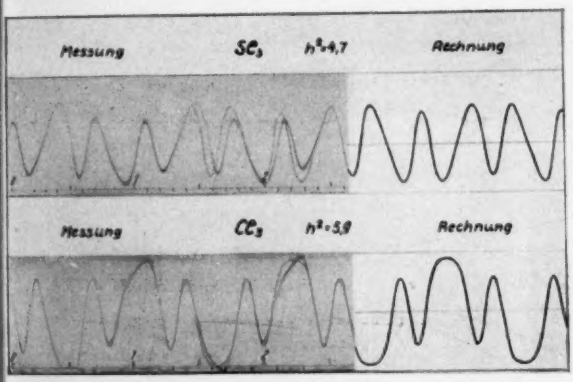


Abb. 11. Schwingungsverlauf an den Grenzen des dritten instabilen Bereichs

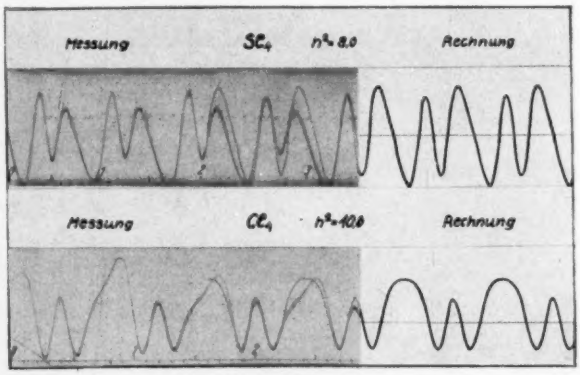


Abb. 12. Schwingungsverlauf an den Grenzen des vierten instabilen Bereichs

sitze. Andererseits entstehen Fehler (Gruppe b) durch ungenaues Bestimmen der zu messenden Größen, wie etwa eine Abweichung der am Instrument abgelesenen Frequenzen gegenüber den tatsächlichen.

Es sei im folgenden die Größe des Einflusses einiger hauptsächlicher Fehlerquellen untersucht und zwar von Gruppe a: Dämpfung, Lagerspiel, Ausschlagsabhängige Federkonstante und, von Gruppe b: Frequenzbestimmung, Messung der Systemeigenschaften, Verzerrung der Abbildung durch das Umkehrprisma.

a) 1. Dämpfung. Wie leicht einzusehen ist, ergibt die Berücksichtigung einer von der Geschwindigkeit abhängigen Reibung an Stelle der MATHIEUschen Differentialgleichung (27) die Gleichung:

$$(30)\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{2b}{J}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\left[\frac{c}{J}-\frac{g\cdot e\cdot M}{J}\cdot\cos(\omega t)\right]\cdot\alpha=0.$$

Durch die selbstadjungierende Substitution:

$$\alpha_{(t)}=e^{-\frac{b}{J}t}\cdot\bar{\alpha}_{(t)}$$

ergibt sich:

$$(31)\quad \frac{d^2\bar{\alpha}}{dt^2}+\left[\frac{c}{J}-\frac{g\cdot e\cdot M}{J}\cdot\cos(\omega t)-\frac{b^2}{J^2}\right]\cdot\bar{\alpha}=0.$$

Aus der Aufnahme eines Ausschwingvorgangs kann b zu etwa $J\cdot 0{,}05$ [cm · kg · sec] festgestellt werden. b^2/J^2 ist also $2{,}5\cdot 10^{-3}$ und immer sehr klein gegen $g\cdot M\cdot e\cdot J=324$. (Wesentlich anders verhält sich eine beträchtliche COULOMBsche Reibung, wie schon in Abschnitt VIII bemerkt wurde.) Der Fehler durch geschwindigkeitsabhängige Reibung ist also vollständig zu vernachlässigen. Allerdings ist dabei zu beachten, daß die Drehzahlen, bei denen die Amplituden der Pendelbewegungen konstant bleiben, bei Vorhandensein einer Dämpfung nun an den Punkten auftreten, an denen die Dämpfung durch eine gleich große Anfachung gerade aufgehoben wird. Es werden also nicht die Grenzkurven für die Anfachung Null ermittelt, sondern die für einen kleinen positiven Wert von $Re\,\mu$, welche sich aber nicht sehr viel davon unterscheiden.

2. Lagerspiel. Das zum Erzielen einer geringen Reibung unbedingt notwendige Lagerspiel erlaubt der Pendelachse zusätzliche und unerwünschte Bewegungen, die sich so abspielen, daß der Pendelschwerpunkt immer seine tiefstmögliche Lage einnimmt. Es werden also die Schwingungsebenen, bei denen der Schwerpunkt tiefer schwingt, gegenüber denen mit höher liegendem Schwerpunkt bevorzugt, so daß das Pendel länger in den Lagen verweilt, zu denen kleine Eigenschwingungsdauern gehören.

Bei der Annahme, daß die radialen und achsialen Lagerspiele den sicher nicht überschrittenen Wert von 0,1 mm aufweisen, errechnet sich die Bevorzugung der Halbperiode der großen Eigenfrequenzen zu 0,25%. Auch die hierdurch bewirkten Fehler in den Versuchsergebnissen sind außerordentlich klein.

3. Ausschlagsabhängigkeit der Federung. Die Richtkraft des Pendels allein ist zwar dem Sinus des Ausschlages proportional, kann aber unbedenklich innerhalb der benutzten kleinen Amplituden unterhalb von 10^0 als dem Winkel selbst verhältnisgleich angesehen werden, da der Fehler bei 10^0 erst 0,46% beträgt.

Wesentlich größer ist die Ausschlagabhängigkeit der Zusatzfeder. Zwar wurde bei der Justierung immer gerade hierauf sehr sorgsam geachtet, aber es mußte stets ein Spiel zwischen der Feder und den sie haltenden Spitzen zugelassen werden und vor allem ist die Federung einer solchen Blattfeder merklich ausschlagsabhängig. Die dadurch bewirkte Abweichung der Dauer von Schwingungen großer und kleiner Amplituden liegt unterhalb der für eine einzelne Schwingung möglichen Ablesegenauigkeit von 0,005 sec (bei den vorkommenden Schwingungsdauern von etwa 0,3 sec bedeutet das 1,5—2,0%). Bei der angewandten genaueren Schwingungsdauerbestimmung durch Errechnung der Mittelwerte mehrerer Perioden ergeben sich aber Unterschiede von $2—3\cdot 10^{-3}$ sec, je nachdem ob mehr große oder mehr kleine Amplituden berücksichtigt werden. Bei der Ausführung der Versuche wurde diese Bestimmung immer im gleichen Amplitudenbereich vorgenommen. Damit sind die mittleren Federkonstanten mit möglichst geringer Streuung gemessen; es bleibt aber die Tatsache der Ausschlagsabhängigkeit bestehen, die Fehler in den Versuchsergebnissen zur Folge hat.

b) 1. Frequenzmessung. Der Frequenzmessung haften Fehler an, die teils durch Anregen der Resonanz des Milliamperemetermeßsystems von der Frequenz der Entladungsstromstöße, teils durch Unterbrechen des Relais bereits vor Beendigung der Entladung entstehen (s. Abb. 6). Diese systematischen Fehler wurden, wie beschrieben, durch eine Eichung ermittelt und bei der Berechnung ausgeschaltet, so daß nur noch die Ableseunsicherheit des Instruments die Genauigkeit der Messung beeinträchtigt. Die Größe dieser Ablesestreuungen beträgt, wie auch aus der Eichkurve zu ersehen ist, 0,015 Hz. Die Ermittlung der Eichkurve geht von der Frequenz des technischen Wechselstroms aus, die hier auf 0,1% konstant gehalten wird.

2. Messung der Schwingungsdauern. Die zur Ermittlung der Konstanten des Schwingungssystems vorgenommene Messung der Pendeleigenschwingungsdauer geht ebenfalls von der Netzfrequenz aus, die als Zeitmarke von 0,01 sec auf dem Papierstreifen mit aufgezeichnet wird. Da die Papiergeschwindigkeit 60 mm/sec beträgt, können die Zeiten auf 0,01 sec genau entnommen werden. Durch die Verwendung möglichst vieler Perioden zur Bestimmung der Schwingungsdauer werden die Abweichungen vom tatsächlichen Wert kleiner als 0,001 sec, welche gegen die von der Ausschlagsabhängigkeit herrührenden Abweichungen der Schwingungsdauer (s. a 3.) zu vernachlässigen sind.

3. Verzerrung der Abbildung. Die in Abschnitt VIII erwähnte Verzerrung der Abbildung durch das Prisma wirkt sich in den Aufnahmen so aus, als wäre der aufgenommenen Schwingung eine harmonische Bewegung von der Frequenz der Gehäusedrehzahl und der Doppelamplitude 3 mm überlagert (Papierbreite 6 cm). Mit Hilfe der Drehzahlmarke kann dieser Fehler aus den Diagrammen eliminiert werden. Es besteht aber die Möglichkeit, die Verzerrung von vornherein zu vermeiden, indem das Prisma durch eine Anordnung von drei Spiegeln ersetzt wird, wodurch auch ein größeres Gesichtsfeld der Optik erreicht werden kann. Im Hinblick auf die geringe Größe des Verzerrungsfehlers wurde auf diesen Umbau verzichtet.

X. Folgerungen aus den Versuchsergebnissen und praktische Bedeutung der Arbeit

Es ist gelungen, einen Schwinger und die zugehörigen Meßverfahren zu entwickeln, die einen nicht nur qualitativen Vergleich zwischen den von der neuerdings sehr ausgebauten Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten gemachten Aussagen und dem zugehörigen physikalischen Sachverhalt gestattet.

Es ergaben sich tatsächlich an Stelle eines einzigen, wie in früheren Arbeiten gefundenen[14]) mehrere gegen langsamere Änderungen der Elastizität sich häufende instabile Bereiche, in denen das Pendel ohne die Einwirkung einer äußeren Kraft unbegrenzt wachsende Ausschläge ausführt.

Darüber hinaus konnten die Grenzen dieser instabilen Bereiche genügend genau gemessen werden, um eine weitgehende Übereinstimmung mit den von der theoretischen Ableitung geforderten Werten festzustellen. Weiterhin wurden entlang den Grenzkurven periodische Pendelbewegungen konstanter Amplitude beobachtet und aufgenommen. Ein Vergleich mit den von E. L. Ince errechneten Mathieuschen Funktionen[15]) zeigt, daß sich die Versuchswerte damit fast vollständig decken, bis auf Abweichungen, die sich daraus erklären, daß die Genauigkeit dieser Messungen schon wesentlich größer ist als die Abweichungen der verwendeten Zusatzblattfeder von der angenommenen Ausschlagsunabhängigkeit der Federzahl.

Die Überprüfung der Ursachen, welche die gefundenen geringen Fehler bewirken, läßt die Hauptfehlerquellen und gleichzeitig die Mittel zu ihrer Beseitigung erkennen.

Mit Hilfe des beschriebenen Apparates können also Lösungen einer beliebigen Mathieuschen Differentialgleichung mit reellen und positiven Parametern auf experimentellem Wege erhalten werden. Diese Lösungen sind für den Sonderfall, daß die Gleichung bei der Dämpfung

sitze. Andererseits entstehen Fehler (Gruppe b) durch ungenaues Bestimmen der zu messenden Größen, wie etwa eine Abweichung der am Instrument abgelesenen Frequenzen gegenüber den tatsächlichen.

Es sei im folgenden die Größe des Einflusses einiger hauptsächlicher Fehlerquellen untersucht und zwar von Gruppe a: Dämpfung, Lagerspiel, Ausschlagsabhängige Federkonstante und, von Gruppe b: Frequenzbestimmung, Messung der Systemeigenschaften, Verzerrung der Abbildung durch das Umkehrprisma.

a) 1. Dämpfung. Wie leicht einzusehen ist, ergibt die Berücksichtigung einer von der Geschwindigkeit abhängigen Reibung an Stelle der MATHIEUschen Differentialgleichung (27) die Gleichung:

$$(30)\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{2b}{J}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\left[\frac{c}{J}-\frac{g\cdot e\cdot M}{J}\cdot\cos(\omega t)\right]\cdot\alpha=0.$$

Durch die selbstadjungierende Substitution:

$$\alpha_{(t)}=e^{-\frac{b}{J}t}\cdot\bar{\alpha}_{(t)}$$

ergibt sich:

$$(31)\quad \frac{d^2\bar{\alpha}}{dt^2}+\left[\frac{c}{J}-\frac{g\cdot e\cdot M}{J}\cdot\cos(\omega t)-\frac{b^2}{J^2}\right]\cdot\bar{\alpha}=0.$$

Aus der Aufnahme eines Ausschwingvorgangs kann b zu etwa $J\cdot 0{,}05$ [cm · kg · sec] festgestellt werden. b^2/J^2 ist also $2{,}5\cdot 10^{-3}$ und immer sehr klein gegen $g\cdot M\cdot e\cdot J=324$. (Wesentlich anders verhält sich eine beträchtliche COULOMBsche Reibung, wie schon in Abschnitt VIII bemerkt wurde.) Der Fehler durch geschwindigkeitsabhängige Reibung ist also vollständig zu vernachlässigen. Allerdings ist dabei zu beachten, daß die Drehzahlen, bei denen die Amplituden der Pendelbewegungen konstant bleiben, bei Vorhandensein einer Dämpfung nun an den Punkten auftreten, an denen die Dämpfung durch eine gleich große Anfachung gerade aufgehoben wird. Es werden also nicht die Grenzkurven für die Anfachung Null ermittelt, sondern die für einen kleinen positiven Wert von $Re\,\mu$, welche sich aber nicht sehr viel davon unterscheiden.

2. Lagerspiel. Das zum Erzielen einer geringen Reibung unbedingt notwendige Lagerspiel erlaubt der Pendelachse zusätzliche und unerwünschte Bewegungen, die sich so abspielen, daß der Pendelschwerpunkt immer seine tiefstmögliche Lage einnimmt. Es werden also die Schwingungsebenen, bei denen der Schwerpunkt tiefer schwingt, gegenüber denen mit höher liegendem Schwerpunkt bevorzugt, so daß das Pendel länger in den Lagen verweilt, zu denen kleine Eigenschwingungsdauern gehören.

Bei der Annahme, daß die radialen und achsialen Lagerspiele den sicher nicht überschrittenen Wert von 0,1 mm aufweisen, errechnet sich die Bevorzugung der Halbperiode der großen Eigenfrequenzen zu 0,25%. Auch die hierdurch bewirkten Fehler in den Versuchsergebnissen sind außerordentlich klein.

3. Ausschlagsabhängigkeit der Federung. Die Richtkraft des Pendels allein ist zwar dem Sinus des Ausschlages proportional, kann aber unbedenklich innerhalb der benutzten kleinen Amplituden unterhalb von 10^0 als dem Winkel selbst verhältnisgleich angesehen werden, da der Fehler bei 10^0 erst 0,46% beträgt.

Wesentlich größer ist die Ausschlagabhängigkeit der Zusatzfeder. Zwar wurde bei der Justierung immer gerade hierauf sehr sorgsam geachtet, aber es mußte stets ein Spiel zwischen der Feder und den sie haltenden Spitzen zugelassen werden und vor allem ist die Federung einer solchen Blattfeder merklich ausschlagsabhängig. Die dadurch bewirkte Abweichung der Dauer von Schwingungen großer und kleiner Amplituden liegt unterhalb der für eine einzelne Schwingung möglichen Ablesegenauigkeit von 0,005 sec (bei den vorkommenden Schwingungsdauern von etwa 0,3 sec bedeutet das 1,5—2,0%). Bei der angewandten genaueren Schwingungsdauerbestimmung durch Errechnung der Mittelwerte mehrerer Perioden ergeben sich aber Unterschiede von $2—3\cdot 10^{-3}$ sec, je nachdem ob mehr große oder mehr kleine Amplituden berücksichtigt werden. Bei der Ausführung der Versuche wurde diese Bestimmung immer im gleichen Amplitudenbereich vorgenommen. Damit sind die mittleren Federkonstanten mit möglichst geringer Streuung gemessen; es bleibt aber die Tatsache der Ausschlagsabhängigkeit bestehen, die Fehler in den Versuchsergebnissen zur Folge hat.

b) 1. Frequenzmessung. Der Frequenzmessung haften Fehler an, die teils durch Anregen der Resonanz des Milliamperemetermeßsystems von der Frequenz der Entladungsstromstöße, teils durch Unterbrechen des Relais bereits vor Beendigung der Entladung entstehen (s. Abb. 6). Diese systematischen Fehler wurden, wie beschrieben, durch eine Eichung ermittelt und bei der Berechnung ausgeschaltet, so daß nur noch die Ableseunsicherheit des Instruments die Genauigkeit der Messung beeinträchtigt. Die Größe dieser Ablesestreuungen beträgt, wie auch aus der Eichkurve zu ersehen ist, 0,015 Hz. Die Ermittlung der Eichkurve geht von der Frequenz des technischen Wechselstroms aus, die hier auf 0,1% konstant gehalten wird.

2. Messung der Schwingungsdauern. Die zur Ermittlung der Konstanten des Schwingungssystems vorgenommene Messung der Pendeleigenschwingungsdauer geht ebenfalls von der Netzfrequenz aus, die als Zeitmarke von 0,01 sec auf dem Papierstreifen mit aufgezeichnet wird. Da die Papiergeschwindigkeit 60 mm/sec beträgt, können die Zeiten auf 0,01 sec genau entnommen werden. Durch die Verwendung möglichst vieler Perioden zur Bestimmung der Schwingungsdauer werden die Abweichungen vom tatsächlichen Wert kleiner als 0,001 sec, welche gegen die von der Ausschlagsabhängigkeit herrührenden Abweichungen der Schwingungsdauer (s. a 3.) zu vernachlässigen sind.

3. Verzerrung der Abbildung. Die in Abschnitt VIII erwähnte Verzerrung der Abbildung durch das Prisma wirkt sich in den Aufnahmen so aus, als wäre der aufgenommenen Schwingung eine harmonische Bewegung von der Frequenz der Gehäusedrehzahl und der Doppelamplitude 3 mm überlagert (Papierbreite 6 cm). Mit Hilfe der Drehzahlmarke kann dieser Fehler aus den Diagrammen eliminiert werden. Es besteht aber die Möglichkeit, die Verzerrung von vornherein zu vermeiden, indem das Prisma durch eine Anordnung von drei Spiegeln ersetzt wird, wodurch auch ein größeres Gesichtsfeld der Optik erreicht werden kann. Im Hinblick auf die geringe Größe des Verzerrungsfehlers wurde auf diesen Umbau verzichtet.

X. Folgerungen aus den Versuchsergebnissen und praktische Bedeutung der Arbeit

Es ist gelungen, einen Schwinger und die zugehörigen Meßverfahren zu entwickeln, die einen nicht nur qualitativen Vergleich zwischen den von der neuerdings sehr ausgebauten Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten gemachten Aussagen und dem zugehörigen physikalischen Sachverhalt gestattet.

Es ergaben sich tatsächlich an Stelle eines einzigen, wie in früheren Arbeiten gefundenen[14]) mehrere gegen langsamere Änderungen der Elastizität sich häufende instabile Bereiche, in denen das Pendel ohne die Einwirkung einer äußeren Kraft unbegrenzt wachsende Ausschläge ausführt.

Darüber hinaus konnten die Grenzen dieser instabilen Bereiche genügend genau gemessen werden, um eine weitgehende Übereinstimmung mit den von der theoretischen Ableitung geforderten Werten festzustellen. Weiterhin wurden entlang den Grenzkurven periodische Pendelbewegungen konstanter Amplitude beobachtet und aufgenommen. Ein Vergleich mit den von E. L. Ince errechneten Mathieuschen Funktionen[15]) zeigt, daß sich die Versuchswerte damit fast vollständig decken, bis auf Abweichungen, die sich daraus erklären, daß die Genauigkeit dieser Messungen schon wesentlich größer ist als die Abweichungen der verwendeten Zusatzblattfeder von der angenommenen Ausschlagsunabhängigkeit der Federzahl.

Die Überprüfung der Ursachen, welche die gefundenen geringen Fehler bewirken, läßt die Hauptfehlerquellen und gleichzeitig die Mittel zu ihrer Beseitigung erkennen.

Mit Hilfe des beschriebenen Apparates können also Lösungen einer beliebigen Mathieuschen Differentialgleichung mit reellen und positiven Parametern auf experimentellem Wege erhalten werden. Diese Lösungen sind für den Sonderfall, daß die Gleichung bei der Dämpfung

Null gerade eine rein periodische Schwingung mit dauernd gleichen Amplituden ergibt, in Tabellen erfaßt. Einen mechanischen Integrator für diesen Fall, aber auch für alle übrigen Fälle, sowohl bei der Dämpfung etwa Null als auch bei einer beliebigen geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung stellt der vorliegende Apparat dar.

Es ist nun eine leichte Aufgabe, das Gerät mit einem elektromagnetischen Anregungssystem auszustatten, das es ermöglicht, dem Schwinger beliebige Störungskräfte zuzuführen um dann als Schwingungsform die Lösung der dadurch bestimmten inhomogenen MATHIEUschen Differentialgleichung zu erhalten.

Eine solche experimentell erhaltene Lösung, deren Genauigkeit für technische Zwecke vollauf genügt, erspart im Falle eines homogenen Systems die außerordentlich mühsame Rechenarbeit, welche im Abschnitt III dargestellt ist und sich für die von INCE[15]) errechneten periodischen Funktionen über vier Jahre erstreckt hat.

Für die inhomogenen Gleichungen können die veröffentlichten Näherungsmethoden, ganz abgesehen von dem beträchtlichen Rechenaufwand, den sie erfordern, wohl noch nicht als genügend gesichert betrachtet werden. Diese inhomogenen Gleichungen sind es aber gerade, welche in den technischen Anwendungen auftreten und welche beherrscht werden müssen, wenn über diese Probleme Aussagen gemacht werden sollen, die über das rein Qualitative hinausgehen.

Zusammenfassung

Zur experimentellen Untersuchung der Erscheinungen, welche in Schwingungssystemen mit periodisch veränderlichen Gliedern auftreten, wurde ein Gerät zur Ausführung von Versuchen und Messungen an einem Pendel mit periodisch veränderlicher Federkonstante entworfen. Die Bewegungsgleichung dieses quasiharmonischen Pendels wird abgeleitet und eine leicht zu erfüllende Bedingung errechnet, welche alle störenden Glieder zum Verschwinden bringt, so daß als Bewegungsgleichung eine homogene MATHIEUsche Differentialgleichung auftritt.

Es wird gezeigt, daß der Versuchsapparat einen doppelt so großen Bereich der Parameterebene zu untersuchen gestattet, als etwa ein elektrischer Schwingungskreis.

Die Stabilitätsverhältnisse und die Schwingungsform der Pendelbewegung werden festgestellt und die Messungen mit den numerischen Ergebnissen der Theorie verglichen, wobei eine weitgehende Übereinstimmung festzustellen ist.

Die geringen vorhandenen Abweichungen werden kritisch beleuchtet und ihre Ursachen erkannt.

Die Arbeit liefert den Nachweis, daß es möglich ist, die Lösung einer vorgelegten MATHIEUschen Differentialgleichung auf versuchsmäßigem Weg mit einer für technische Zwecke genügenden Genauigkeit zu finden. Hieran knüpft der Verfasser den Vorschlag, ein etwas ergänztes Gerät zur Lösung von MATHIEUschen Differentialgleichungen mit Störungsfunktion zu verwenden, deren Theorie umständlich und noch nicht gesichert ist.

Die vorliegende Arbeit entstand auf Grund einer Anregung von Prof. Dr. W. HORT †. Der Firma Siemens-Schuckert A.-G. bin ich für die weitgehende Unterstützung dieser Untersuchung sehr zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 28. Juli 1939.)

Eine Methode zur Erzeugung extrem starker stehender Schallwellen in Luft

Von Hermann Oberst

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin

(Mit 10 Textabbildungen)

I. Einleitung

Das Problem der Erzeugung von Luftschallwellen extrem großer Amplituden mit möglichst rein sinusförmigem zeitlichen Verlauf ist in mehrfacher Hinsicht von Bedeutung. Als extrem schallstark sollen solche Wellen bezeichnet werden, deren Druckamplituden mit dem in der Luft herrschenden Gleichdruck, bzw. deren Schnelleamplituden mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind. Von großem mathematischen, physikalischen und technischen Interesse ist das Studium der Nichtlinearitäten, die bei sinusförmiger Erregung der Schallwellen im Falle extremer Schallstärken auftreten. Möglichst rein sinusförmige Schalldrucke im linearen Druckbereich bis hinauf zur Grenze der linearen Belastbarkeit der Luft braucht man technisch beispielsweise für die Prüfung und Absoluteichung von Kondensator- und Kristallmikrophonen, die zur Messung starker Schallfelder (z. B. von Flugmotoren) dienen sollen. In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Erzeugung schallstarker stehender Wellen beschrieben; diese werden erzeugt in zylindrischen Rohrsystemen der in Abb. 1 skizzierten Art mit einer Unstetigkeitsstelle des Querschnitts und einem starr abgeschlossenen Ende. Die Frage der Eigenfrequenzen solcher Systeme ist in der Literatur mehrfach behandelt worden[1]). Hier wird darüber hinaus auf Intensitätsfragen, genauer auf die Frage der Amplitudenverteilung von Schalldruck und -schnelle eingegangen. Die Theorie wird durchgeführt mit dem Ziele, Richtlinien für die zweckmäßige Dimensionierung der Systeme angeben zu können, und experimentell geprüft bei Verwendung einer speziellen Schallquelle, die in die Theorie einbezogen wird. Zunächst soll kurz auf den Gedanken eingegangen werden, der der Methode zugrunde liegt.

[1]) E. Skudrzyk, Akust. Z. 4 (1939), S. 172; A. T. Jones, J. Acous. Soc. Am. 10 (1939), S. 167.

II. Grundgedanken der Methode zur Erzeugung extrem schallstarker stehender Wellen

Wenn man in der Luftsäule eines Kundtschen Rohres der Länge l_1, das an einem Ende offen, am anderen starr abgeschlossen sei, stehende ebene Wellen der Frequenz f erzwingt und dabei bei Änderung von f den Schalldruck P_e am offenen Ende konstant hält, durchläuft der Betrag des Schalldrucks $p_1(l_1)$ am geschlossenen Ende mit wachsendem f Maxima und Minima. Maxima von $|p_1(l_1)|$ erhält man bei den Frequenzen, für die $k\,l_1 = (2n+1)/2 \cdot \pi$ oder $l_1 = (2n+1)/4 \cdot \lambda$ ist, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Dabei sind k die Wellenzahl, λ die Wellenlänge, c die Schallgeschwindigkeit, $k = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$ (vgl. den folgenden Abschnitt). Für die Maxima $|p_1(l_1)_{max}|$ gilt bei kleiner Rohrdämpfung $|p_1(l_1)_{max}| = P_e/\beta_1 l_1$, wobei β_1 (cm^{-1}) die Dämpfungskonstante der ebenen Welle im Rohr bei der Frequenz f bedeutet; $\beta_1 l_1$ wird dabei als klein gegen 1 angenommen. Man hat also am geschlossenen Rohrende im Druckbauch eine Überhöhung des Schalldruckes gegenüber dem Druck am Rohreingang um den Faktor $1/\beta_1 l_1$. Schließt man nun an das erste Rohr in der aus den Abb. 1 und 4 ersichtlichen Weise ein zweites einseitig starr abgeschlossenes Rohr von kleinerem Quer-

schnitt an, so werden die Schallvorgänge im zweiten Rohr die im ersten um so weniger beeinflussen, je kleiner der Querschnitt des zweiten Rohres gegenüber dem des ersten ist. Im Grenzfall $F_2/F_1 \to 0$ (F_1, F_2 die Flächeninhalte der Rohrquerschnitte) wird $p_1(l_1)$ denselben Verlauf nehmen wie im oben diskutierten Fall des starr abgeschlossenen Rohres l_1, man hat also in den Fällen $l_1 = (2n+1)/4 \cdot \lambda$ am Rohrende l_1 im Druckbauch $|p_1(l_1)_{max}| = P_e/\beta_1 l_1$. Dieser Schalldruck muß aber aus Stetigkeitsgründen gleich dem Schalldruck am Eingang des zweiten Rohres sein. In diesem sind die Verhältnisse ähnlich wie im Rohre l_1; statt P_e ist der Eingangsdruck $p_1(l_1)$ vorgegeben. Macht man nun beispielsweise $l_1 = l_2 = \lambda/4$, so hat man im Druckbauch am Ende des zweiten Rohres den Schalldruck $|p_2(l_2)_{max}| = |p_1(l_1)_{max}|/\beta_2 l_2$, wobei β_2 (cm^{-1}) die Dämpfungskonstante der ebenen Welle im zweiten Rohre ist; $\beta_2 l_2$ sei wieder klein gegen 1. Der Schalldruck im Druckbauch am Ende dieses Rohres ist gegenüber dem am Ende des ersten um den Faktor $1/\beta_2 l_2$ vergrößert, und es wird schließlich

$$|p_2(l_2)_{max}| = P_e/\beta_1 l_1 \cdot \beta_2 l_2. \tag{1}$$

Im engeren Rohr kann man also mit Hilfe des Querschnittsprunges im Rohrsystem eine stehende ebene Welle beträchtlicher Schallstärke erzielen mit großen Schnelleamplituden im Schnellebauch in der Nähe des offenen Rohrendes und großen Druckamplituden im Druckbauch am starr abgeschlossenen Ende.

Praktisch kann man das Querschnittsverhältnis F_2/F_1 nicht beliebig klein machen. Es ist u. U. wegen des Wachsens von β mit abnehmendem Rohrradius sogar unzweckmäßig, F_2 zu klein zu machen. Darüber hinaus sind aus experimentellen Gründen möglichst weite Querschnitte des zweiten Rohres erwünscht. Im folgenden Abschnitt wird daher der Verlauf der Schallfelder in den beiden Rohren bei einem endlichen Querschnittsverhältnis F_2/F_1 behandelt.

III. Theorie der Methode

Die folgenden theoretischen Überlegungen verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Schallfelder so stark werden, daß die sie beherrschenden Differentialgleichungen nicht mehr genügend nahe linear sind. In dem Rohrsystem der in Abb. 1 skizzierten Art mit den Rohren der Längen l_1 und l_2, der Radien r_1 und r_2, bzw. der Querschnitte F_1 und F_2 sollen die erzwungenen axialen stehenden Wellen der Luftsäulen mit der Frequenz f bei gegebenem Schalldruck

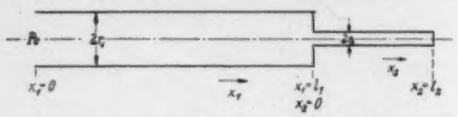


Abb. 1. Skizze des Rohrsystems

P_e am Eingang des Systems untersucht werden. Die Wellenlänge λ sei groß gegen r_1. Vereinfachend wird angenommen, daß die Wellen in den beiden Rohren in beliebig kleiner Entfernung vom Rohreingang bzw. von der Sprungstelle des Querschnittes eben sind[2]), und daß die Schallgeschwindigkeit in beiden Rohren die gleiche und gleich der Schallgeschwindigkeit in freier Luft ist. Für die Rohrdämpfungen β_1 und β_2 sind bei starren glatten Rohren Werte zu erwarten, die nach neueren experimentellen Untersuchungen[3]) etwa 15% größer sind als die aus der KIRCHHOFFschen Theorie[4]) folgenden. Die Dämpfungskonstanten sind danach für Zimmertemperatur und Atmosphärendruck zu berechnen aus Gl. (2):

$$\beta = 3{,}4 \cdot 10^{-5} \sqrt{f}/r. \tag{2}$$

Die gedämpften stehenden ebenen Wellen sind dann unter Fortlassung des Zeitfaktors $e^{j\omega t}$ in der Form darzustellen

$$\begin{aligned} v_i(x_i) &= A_i \mathfrak{Cof}\,\gamma_i x_i + B_i \mathfrak{Sin}\,\gamma_i x_i, \\ p_i(x_i) &= -Z_0 (A_i \mathfrak{Sin}\,\gamma_i x_i + B_i \mathfrak{Cof}\,\gamma_i x_i). \end{aligned} \tag{3}$$

Der Index i vertritt die Werte 1 und 2. Es sind $v_i(x_i)$ und $p_i(x_i)$ Schallschnelle und -druck an der Stelle x_i, $Z_0 = \varrho_0 c$ (ϱ_0 die Luftdichte) der Wellenwiderstand der Luft, $\gamma_i = \beta_i + jk$ das Übertragungsmaß, $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi f$, A_i

[2]) Zur Begründung der Berechtigung dieser Annahme s. E. SKUDRZYK, a. a. O.

[3]) E. WAETZMANN und L. KEIBS, Ann. Physik (5) 22 (1935), S. 247; H. OBERST, Akust. Z. 2 (1937), S. 76; K. SCHUSTER und W. STÖHR, Akust. Z. 4 (1939), S. 253.

[4]) G. KIRCHHOFF, Pogg. Ann. 134 (1868), S. 177

B_i aus den Randbedingungen zu bestimmende komplexe Konstanten.

Die Forderungen der Stetigkeit des Schallstromes und des Schalldruckes an der Sprungstelle des Querschnittes $x_1 = l_1$ bzw. $x_2 = 0$ liefern unter den oben gemachten Annahmen ebener Wellen bis zur Sprungstelle die Bedingungen

$$F_1 \cdot v_1(l_1) = F_2 v_2(0), \qquad p_1(l_1) = p_2(0). \tag{3}$$

Ferner muß am starren Abschluß $x_2 = l_2$ die Schnelle Null sein, also

$$v_2(l_2) = 0. \tag{4}$$

Wenn man an Hand der Randbedingungen (Gl. (4)) die Konstanten A_i und B_i und mit diesen die Schalldrucke und -schnellen in den beiden Rohren berechnet, erhält man

$$p_1(x_1) = P_e \frac{N(x_1)}{N_0}, \quad v_1(x_1) = \frac{P_e}{Z_0} \frac{N^*(x_1)}{N_0},$$
$$p_2(x_2) = P_e \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma_2(l_2 - x_2)}{N_0}, \quad v_2(x_2) = \frac{P_e}{Z_0} \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma_2(l_2 - x_2)}{N_0}, \tag{5}$$

wobei

$$N(x_1) = \mathfrak{Cof}\,\gamma_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2 + \frac{F_2}{F_1} \mathfrak{Sin}\,\gamma_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma_2 l_2,$$
$$N^*(x_1) = \mathfrak{Sin}\,\gamma_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2 + \frac{F_2}{F_1} \mathfrak{Cof}\,\gamma_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma_2 l_2,$$
$$N_0 = N(x_1 = 0).$$

Von Interesse ist die Eingangsimpedanz pro cm² Z_e des Rohrsystems

$$Z_e = \frac{p_1(0)}{v_1(0)} = Z_0 \frac{N_0}{N_0^*} \text{ mit } N_0^* = N^*(x_1 = 0). \tag{6}$$

Gemessen werden im allgemeinen die Beträge des Schalldruckes und der Schallschnelle. Die Kenntnis der Beträge $|N(x_1)|$ und $|N^*(x_1)|$ ist daher erforderlich. Diese lassen sich in die folgenden gut diskutierbaren Formen bringen:

$$|N(x_1)|^2 = \left(\cos k(l_1 - x_1) \cdot \cos k l_2 - \frac{F_2}{F_1} \sin k(l_1 - x_1) \cdot \sin k l_2\right)^2 + \left(\mathfrak{Sin}\,\beta_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Cof}\,\beta_2 l_2 + \frac{F_2}{F_1} \mathfrak{Cof}\,\beta_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta_2 l_2\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right)\left(\mathfrak{Sin}^2 \beta_2 l_2 \cdot \cos^2 k(l_1 - x_1) - \mathfrak{Sin}^2 \beta_1(l_1 - x_1) \cdot \sin^2 k l_2\right), \tag{7}$$

$$|N^*(x_1)|^2 = (\sin k(l_1 - x_1) \cdot \cos k l_2 + \frac{F_2}{F_1} \cos k(l_1 - x_1) \cdot \sin k l_2)^2 + \left(\mathfrak{Sin}\,\beta_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Cof}\,\beta_2 l_2 + \frac{F_2}{F_1} \mathfrak{Cof}\,\beta_1(l_1 - x_1) \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta_2 l_2\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right)\left(\mathfrak{Sin}^2 \beta_2 l_2 \cdot \sin^2 k(l_1 - x_1) - \mathfrak{Sin}^2 \beta_1(l_1 - x_1) \sin^2 k l_2\right). \tag{8}$$

Die Beträge $|N_0|$ und $|N_0^*|$ erhält man aus (7) und (8), wenn man $x_1 = 0$ setzt.

In der vorliegenden Arbeit interessiert insbesondere $|N_0|$. Der Schalldruck am geschlossenen Ende $x_2 = l_2$ des Rohrsystems genügt der Gleichung $|p_2(l_2)| = |P_e| / |N_0|$, und der Verlauf von $|p_2(l_2)|$ in Abhängigkeit von der Frequenz hängt bei konstant gehaltenem P_e nur vom Verlauf von $|N_0|$ ab.

Im Grenzfall $F_1 = F_2$ geht das Rohrsystem in ein einfaches Kundtsches Rohr konstanten Querschnitts von der Länge $l = l_1 + l_2$ über, und man erhält mit $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ aus (7) $|N_0|^2 = \cos^2 kl + \mathfrak{Sin}^2 \beta l$. Maxima von $|p_2(l_2)|$ liegen bei den Frequenzen, für die die Resonanzbedingung $\cos kl = 0$, d. h. $kl = (2n + 1)/2 \cdot \pi$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ oder $l = (2n + 1)/4 \cdot \lambda$ erfüllt ist, und es wird in diesen Fällen $|p_2(l_2)| = P_e / \mathfrak{Sin}\,\beta l \approx P_e / \beta l$ bei kleinem βl entsprechend den Überlegungen des vorigen Abschnitts.

Im Falle des Rohrsystems mit einer unstetigen Änderung des Rohrquerschnitts liest man aus (7) mit $x_1 = 0$ die Resonanzbedingung ab

$$\cos kl_1 \cdot \cos kl_2 - \frac{F_2}{F_1} \sin kl_1 \cdot \sin kl_2 = 0 \tag{9}$$

oder

$$\operatorname{cotg} 2\pi l_1/\lambda = (F_2/F_1) \cdot \operatorname{tg} 2\pi l_2/\lambda. \tag{9a}$$

Bei den dieser Gleichung genügenden Frequenzen nimmt N_0 bei kleinen Rohrdämpfungen, d. h., wenn $\mathfrak{Sin}\,\beta_1 l_1$ und $\mathfrak{Sin}\,\beta_2 l_2$ sehr klein sind, kleinste Beträge an, und $|p_2(l_2)|$ erreicht Maxima.

Der im vorigen Abschnitt behandelte Fall tritt dann ein, wenn F_2/F_1 gegen 0 geht und $l_1 = l_2 = \lambda/4$ gewählt wird. Dann geht $|N_0|$ nach (7) in $|N_0| = \mathfrak{Sin}\,\beta_1 l_1 \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta_2 l_2$ über, und es wird für kleine βl $|p_2(l_2)| = \frac{P_e}{\beta_1 l_1 \cdot \beta_2 l_2}$.

Nicht harmonische Resonanzfrequenzen

Ein wesentlicher Vorzug der Methode folgt aus der Resonanzbedingung (9). Die dieser transzendenten Gleichung genügenden Frequenzen liegen im allgemeinen nicht harmonisch, und bei Anregung des Rohrsystems mit einem obertonreichen Eingangsschalldruck P_e, dessen Grundfrequenz einer Resonanzfrequenz des Systems entspricht, fallen die höheren Teil-

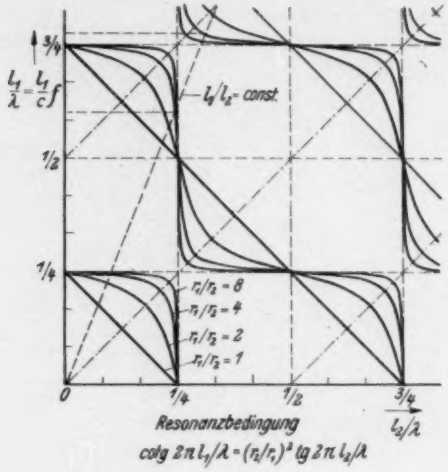


Abb. 2. Die Resonanzbedingung für das Rohrsystem

töne von P_e im allgemeinen nicht in Resonanzgebiete des Systems, und man erhält in den Bäuchen der Welle im engen Rohr, die in erster Linie interessiert, nahezu rein sinusförmige zeitliche Änderungen des Druckes bzw. der Schnelle. In Abb. 2 sind die der Resonanzbedingung (9a) genügenden Kurven graphisch dargestellt worden für verschiedene Parameter r_1/r_2. Bei gegebenen Verhältnissen l_1/l_2 und r_1/r_2 schneidet die Gerade durch den Nullpunkt mit der Neigung l_1/l_2 (vgl. Abb. 2) die zum Parameter r_1/r_2 gehörende Kurvenschar in Punkten, deren Ordinaten den Resonanzfrequenzen proportional sind. Aus Abb. 2 ersieht man, daß diese Frequenzen nicht ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind.

Die Schallquelle

Der Eingangsdruck P_e, der bisher als konstant angenommen wurde, ist im allgemeinen eine Frequenzfunktion, die von der benutzten Schallquelle abhängt. Es soll hier theoretisch vor allem der Fall diskutiert werden, der in der Arbeit angenähert verwirklicht wurde: das Rohr sei am Eingang $x_1 = 0$ offen, es werde eine äußere Schallquelle benutzt. Das Problem der Schallvorgänge im Rohr unter diesen Bedingungen ist von RAYLEIGH im Anschluß an HELMHOLTZ behandelt worden[5]). Der Theorie liegen die folgenden Annahmen zugrunde. Der Rohrdurchmesser soll klein gegen die Wellenlänge sein. Die Dämpfung der Schallwellen (Energieumwandlung in Wärme) wird nicht berücksichtigt. Am offenen Ende des Rohres wird eine unendlich ausgedehnte ebene Schallwand senkrecht zur Rohrachse angenommen. Wenn der Rohreingang durch eine feste in der Schirmebene liegende Platte verschlossen ist, soll die äußere Schallquelle ein Geschwindigkeitspotential erzeugen, das am Orte der Platte einen über die Plattenfläche nahezu konstanten Wert H annimmt. Bei geöffnetem Eingang überlagert sich diesem Potential das einer von der Mündung ausgehenden fortschreitenden Schallwelle, die von einem gewissen Abstand von der Mündung an als kugelförmig angenommen wird; das ursprüngliche Potential mit dem Wert H am Eingang soll dadurch nicht beeinflußt werden. Diese Annahmen bedeuten, daß die Schallquelle genügend weit vom Rohr entfernt ist, und daß ihre Schwingungen vom äußeren Schallfeld unabhängig sind, daß sie also einen genügend kleinen inneren Widerstand hat.

Wenn man den RAYLEIGHschen Gedankengängen folgend Schalldruck und -schnelle im Inneren des in der Arbeit behandelten Rohrsystems unter Berücksichtigung der Rohrdämpfung (β_1 und β_2) berechnet, kommt man zu dem Ergebnis, daß man zur Beschreibung des Schallfeldverlaufs im System bei genügend großem l_1 sehr angenähert die Gleichungen (5) beibehalten kann, wenn man in diesen für P_e den Schalldruck P setzt, den die Schallquelle bei verschlossenem Rohreingang an der Verschlußplatte erzeugt, und im Ausdruck für N_0 die Länge l_1 um eine Längenkorrektion Δl_1, die von der Größenordnung des Radius r_1 ist,

[5]) RAYLEIGH, Theory of Sound II, §§ 313—316.

und die Dämpfung $\beta_1 l_1$ um die Strahlungsdämpfung vergrößert, für die RAYLEIGH den Wert $r_1^2 k^2/2$ berechnet; bei fehlender Schallwand modifiziert sich der letztgenannte Wert, so daß diesem nur größenordnungsmäßig Bedeutung zukommt. Die Ausdrücke für $N(x_1)$ und $N^*(x_1)$ in den Gleichungen (5) bleiben ungeändert.

Man kann das Ergebnis der Berechnung des Schallfeldes im Rohrsystem bei Benutzung einer äußeren Schallquelle unter den oben gemachten Annahmen auch in der Weise darstellen, daß man formal einen äußeren Widerstand

$$Z_a = Z_0 (r_1^2 k^2/2 + j k \Delta l_1) \tag{10}$$

einführt und den Eingangsschalldruck an Hand des elektrischen Analogieschaltbildes (Abb. 3) berechnet (Z_e s. Gl. (6)); man erhält $P_e = P Z_e/(Z_a + Z_e)$. Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichungen (5) ein, so lassen sich diese unter unwesentlichen Vernachlässigungen so umformen, daß an die Stelle von P_e der Schalldruck P tritt und in N_0 bei genügend großem l_1 in der oben angegebenen Weise $\beta_1 l_1$ und l_1 um die Strahlungsdämpfung $r_1^2 k^2/2$ und die Längenkorrektion Δl_1 vergrößert erscheinen.

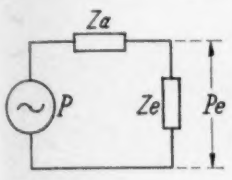


Abb. 3. Ersatzschaltbild

Es ist interessant zu sehen, wie sich die Verhältnisse ändern bei Benutzung einer Kolbenmembran, etwa eines elektrodynamischen Schallsenders, die den Rohreingang abschließt, und auf die eine Wechselkraft K wirkt. In diesem Falle tritt an die Stelle von Z_a der Gl. (10) der Ausdruck $Z_a = (\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \omega \delta) m/j \omega F_1$, in dem m die Masse, ω_0 die Eigenfrequenz und δ die Dämpfungskonstante der Membran bedeuten; für P ist zu setzen K/F_1. In diesem Falle ist der Wirkwiderstand von Z_a, $\Re(Z_a) = 2 \delta m/F_1$, praktisch stets so groß, daß immer $|Z_a/Z_0| \gg 1$ ist, während im Falle der Gl. (10) $|Z_a/Z_0| \ll 1$ war. Führt man $P_e = P Z_e/(Z_a + Z_e)$ mit $P = K/F_1$ und dem für die Kolbenmembran gültigen Z_a in die Gleichungen (5) ein, so lassen sich diese in guter Näherung so umformen, daß an die Stelle von P_e/N_0 der Ausdruck $Z_0 (K/F_1 Z_a)/N_0^*$ tritt, wobei in $N_0^* \gamma_1 l_1$ um Z_0/Z_a zu vergrößern ist ($|Z_0/Z_a| \ll 1$); es wird also beispielsweise $p_2(x_2) = Z_0 (K/F_1 Z_a) (\mathfrak{Cof} \gamma_2 (l_2 - x_2)/N_0^*)$. Wenn im ersten Teil dieses Abschnitts angenommen worden wäre, daß statt P_e am Rohreingang die konstante Schnelle V_e vorgegeben sei, wäre in den Gleichungen (5) an die Stelle von P_e/N_0 der Ausdruck $Z_0 V_e/N_0^*$ getreten; man hätte also beispielsweise erhalten $p_2(x_2) = Z_0 V_e \cdot \mathfrak{Cof} \gamma_2 (l_2 - x_2)/N_0^*$. In diesem Falle würden die Resonanzfrequenzen des Systems den Eigenfrequenzen des beiderseitig starr abgeschlossenen Rohrsystems entsprechen und der Resonanzbedingung $(F_1/F_2) \operatorname{tg} k l_1 + \operatorname{tg} k l_2 = 0$ genügen (vgl. E. SKUDRZYK[1]). Abgesehen von der Korrektion an $\gamma_1 l_1$ entspricht also die Rohrapparatur mit der Kolbenmembran am Eingang einem System, bei dem die Eingangsschnelle $V_e = K/F_1 Z_a$ vorgegeben ist. Im allgemeinen genügen die Resonanzfrequenzen der Rohrapparatur einschließlich der Kolbenmembran bei konstanter Kraft K der Bedingung für die Eigenfrequenzen des beiderseitig starr abgeschlossenen Rohrsystems, und die Kolbenmembran stellt dann einen schallharten Rohrabschluß dar. Dagegen entsprechen im Falle der äußeren Schallquelle, für die Z_a gleich dem Ausdruck (10) ist, und die in der vorliegenden Arbeit angenähert durch eine Schallsirene verwirklicht wurde, die Resonanzfrequenzen denen des einseitig offenen Rohrsystems.

IV. Die experimentelle Prüfung der Theorie

Bei den experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit wurde das Rohrsystem der Abb. 4 mit auswechselbarem engen Rohr benutzt. Als Schallquelle diente eine Lochsirene. Diese bestand aus einem Ventilator (einem Zentrifugalgebläse mit Schaufelrad im Spiralgehäuse), dessen Gleichluftstrom hinter der Austrittsöffnung durch eine Aluminiumlochscheibe mit veränderlicher Frequenz moduliert wurde. Abb. 4 zeigt rechts den an das Gebläse angesetzten trichterförmigen Austrittsstutzen und die Lochscheibe (Durchmesser der Austrittsöffnung und der Scheibenlöcher 5 cm). Der Staudruck in der Mitte des Luftstrahles hinter der Austrittsöffnung betrug bei freiem (unmoduliertem) Strahl und der höchsten benutzten Drehzahl des Gebläses etwa 200 mm Wassersäule oder $2 \cdot 10^4$ μbar.

Der Frequenzbereich der Messungen war nach oben begrenzt durch die Lochzahl der Scheibe und die maximale Drehzahl des zugehörigen Motors; die obere Grenzfrequenz lag bei 400 Hz.

Das Verhalten der Sirene am Rohr wurde zunächst an einem einfachen starr abgeschlossenen Messingrohr von 12 cm lichter Weite und

der Länge $l = 25$ cm untersucht, das später in der Apparatur der Abb. 4 verwandt wurde.

Mit einem in den starren Abschluß eingebauten (nicht absolut geeichten) Kondensatormikrophon wurde die Frequenzkurve des Schalldrucks $|p(l)|$ am Rohrende bei konstant gehaltener Drehzahl des

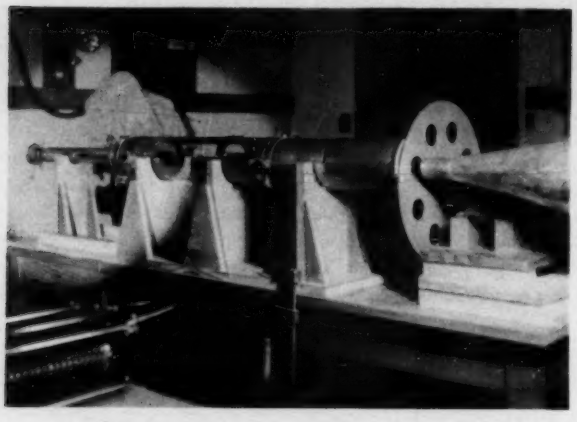


Abb. 4. Rohrapparatur zur Erzeugung starker stehender Schallwellen

Gebläses aufgenommen. Die Abstände Gebläseaustritt—Lochscheibe und Lochscheibe—Rohreingang wurden variiert. Der günstigste Abstand der Lochscheibe von der Gebläsemündung betrug 2—3 cm; die Vorgänge im Gebläseinneren werden in diesem Falle durch den Modulationsvorgang nicht gestört, und es ergeben sich optimale Schalldrucke P und $|p(l)|$. Die tiefste Resonanzstelle von $|p(l)|$ lag bei 290 Hz; die zugehörige Viertelwellenlänge ist $\lambda/4 \approx 30$ cm. Bei einer Rohrlänge $l = 25$ cm ist dann die Längenkorrektion $\Delta l \approx 5$ cm entsprechend der nach RAYLEIGH zu erwartenden. Die Halbwertbreite der Resonanzkurven $|p(l)|$ in der Umgebung der Resonanzstelle hing vom Abstand der Lochscheibe vom Rohreingang ab. Bei etwa 3 cm Abstand ergaben sich aus der Halbwertbreite[6]) für die Strahlungsdämpfung Werte von der Größenordnung von $r^2 k^2/2$ bei 290 Hz; bei Verkleinerung des Abstandes wuchs die Halbwertbreite erheblich an, ohne daß der Betrag des Maximums von $|p(l)|$ sich wesentlich änderte, was auf eine Vergrößerung von P schließen ließ; die Resonanzmaxima verschoben sich dabei nur unwesentlich nach tieferen Frequenzen.

Trotz der Abweichungen des experimentellen Aufbaus von den theoretischen Annahmen in bezug auf die Schallquelle darf man nach diesem experimentellen Befund bei der Berechnung der Frequenzkurven des Schalldrucks an einer Stelle des Rohrsystems in der Umgebung einer Resonanzstelle annehmen, daß der konstante Schalldruck P und ein äußerer Widerstand Z_a (Gl. (10)) in der im vorigen Abschnitt definierten Bedeutung gegeben sind; für den Realteil von Z_a hat man Werte anzunehmen, die von der Größenordnung des theoretischen Wertes $r_1^2 k^2/2$ und u. U. größer als dieser sind; die Längenkorrektion Δl_1 im Imaginärteil entspricht der theoretisch zu erwartenden.

Die Theorie des Rohrsystems wurde geprüft an dem hinreichend starkwandigen Rohrsystem der Abb. 4, wobei das enge Rohr durch das der Abb. 5 ersetzt war. Die Maße des Systems waren $l_1 = 107$ cm, $l_2 = 45$ cm, $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 1{,}25$ cm, also $F_2/F_1 = (r_2/r_1)^2 = 0{,}043$.

Der Schalldruck am Rohrende $x_2 = l_2$ wurde aus dem Schallstrahlungsdruck S berechnet, der mit einem U-Manometer mit Wasserfüllung gemessen wurde (s. Abb. 5). Nach RAYLEIGH[7]) besteht zwischen S und der Energiedichte E bei adiabatischen Zustandsänderungen die Beziehung $S = (\varkappa + 1)\, E/2$, $\varkappa = c_p/c_v$, oder wenn man E durch den Effektivwert des Schalldruckes $|p_2(l_2)|$ ausdrückt, $S = ((\varkappa + 1)/4cZ_0)\,|p_2(l_2)|^2$[8]). Hieraus folgt für Zimmertemperatur und Atmo-

Abb. 5. Rohrsystem mit U-Manometer und Quarzmikrophon zur Schalldruckmessung

sphärendruck $|p_2(l_2)| = 1{,}53 \cdot 10^4 \sqrt{S}\ \mu$bar, wenn man S in mm W. S. mißt. Bei Schalldrucken über $5 \cdot 10^4\ \mu$bar ist in der genannten Anord-

[6]) Über die Methode der Dämpfungsbestimmung aus der Halbwertbreite s. H. OBERST, Anm. 3.

[7]) RAYLEIGH, Philos. Mag. 10 (1905), S. 366.

[8]) Alle im folgenden angegebenen Schalldruckbeträge $|p_1(x_1)|$ und $|p_2(x_2)|$ sind Effektivwerte.

nung S und damit $|p_2(l_2)|$ gut meßbar[9]). Bei den Messungen wurde darauf geachtet, daß die Länge der Luftsäule im Manometerrohr von $x_2 = l_2$ bis zur Wasseroberfläche klein gegen $\lambda/4$ war.

Die Resonanzstellen des Systems bei konstanter Drehzahl des Gebläses wurden in der Nähe der Frequenzen gefunden, die der Gl. (9) bei den oben angegebenen Dimensionen genügen.

Genauer untersucht wurde die Umgebung der zweiten Resonanzstelle in der Nachbarschaft von 180 Hz, die der Resonanz im idealisierten Fall des Abschn. II ($F_2/F_1 \to 0$) mit $l_1 = 3\,\lambda/4$ und $l_2 = \lambda/4$ entspricht.

Nahe bei $x_1 + \Delta l_1 = \lambda/4$ in der Nähe des Bewegungsknotens im weiten Rohr wurde eine Gummimembran aus dünnem Transparenzgummi angebracht (Sitz der Membran in Abb. 4 an der Ansatzstelle des Messingrohres am weiten Glasrohr) mit möglichst kleiner Masse pro Flächeneinheit, so daß sie die Schallausbreitung möglichst wenig störte. Sie schirmte den den Schallwellen überlagerten Gleichluftstrom des Gebläses ab, und man hatte hinter der Membran ein reines Wechselfeld. Für den Ausgleich eines kleinen Überdrucks im abgeschlossenen Rohrteil bei Ausbauchung der Membran war eine Düse am Rohrende $x_1 = l_1$ vorgesehen. Unter diesen Umständen zeigt das U-Manometer am Rohrende $x_2 = l_2$ ausschließlich den Schallstrahlungsdruck an, dem sich beim Fehlen der Membran ein von der Gleichströmung herrührender Druckanteil überlagern kann.

Der Schalldruck im weiten Rohr wurde mit einem absolut geeichten Quarzmikrophon gemessen. Frequenzen oberhalb 200 Hz wurden bei diesen Messungen im Verstärker mit einem Tiefpaß abgeschnitten.

Das Mikrophon (Quarzdurchmesser und -dicke 1 cm) mit der geschirmten Zuleitung zum Verstärker sind in Abb. 5 zu sehen; das zur Abschirmung dienende Messingrohr von 5 mm Durchmesser war verschiebbar und genügend lang, so daß der Schalldruck an jeder Stelle x_1 bis zur Gummimembran bei konstanter Empfindlichkeit des Mikrophons gemessen werden konnte. Absolut geeicht wurde dieses im Druckbauch am Ende des engen Rohres mit Hilfe der Strahlungsdruckmessung mit dem U-Manometer. Wegen seiner Kleinheit störte das Mikrophon das Schallfeld im weiten Rohr im allgemeinen nicht merklich.

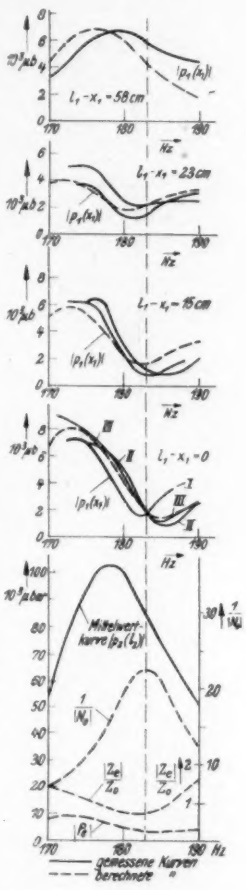


Abb. 6. Effektivwerte des Schalldrucks an verschiedenen Stellen des Rohrsystems in der Umgebung der Resonanzstelle nahe 180 Hz

Die Frequenzkurven des Schalldruckes $|p_1(x_1)|$ wurden an verschiedenen Stellen x_1 (s. Abb. 6) gleichzeitig mit dem Strahlungsdruck am Ende $x_2 = l_2$ im Frequenzintervall 170 Hz $\leq f \leq$ 190 Hz bei der konstanten Gebläsedrehzahl gemessen, die den Staudruck im freien Strahl von etwa 200 mm W. S. lieferte. Da entgegen den vereinfachenden Annahmen der Theorie die Welle im ersten Rohr nicht bis zum Rohreingang eben war, der Eingangsschalldruck P_e also nicht eindeutig bestimmt werden konnte, wurde beim Vergleich der Theorie mit den Meßergebnissen der folgende Weg eingeschlagen.

Aus den gemessenen Frequenzkurven des Schallstrahlungsdrucks S wurden die zuge-

[9]) Rayleigh berechnet den Schallstrahlungsdruck auf die reflektierende Wand unter Berücksichtigung der nichtlinearen Verzerrungen der Schallwelle als zeitlichen Mittelwert des Schalldruckes an der Wand in zweiter Näherung. Cl. Schaefer stellt in einer neuen Arbeit fest (Ann. Physik (5) **35** (1939) S. 473), daß bei Ralyeigh die zweite Näherung nicht konsequent durchgeführt wird, und kommt selbst zu dem Ergebnis, daß $S = E$ sein muß. Die Absolutbeträge der mit Hilfe der Strahlungsdruckmessung bzw. -eichung in dieser Arbeit bestimmten Effektivwerte der Schalldrucke sind demnach wahrscheinlich mit einem festen Faktor zu multiplizieren. Ihre Größenordnung, auf die es hier allein ankommt, ist jedoch zutreffend; das zeigt der Vergleich mit den Schalldrucken, die sich aus den Amplituden kleiner mitschwingender Teilchen im Schallfeld abschätzen lassen (vgl. Abschn. V). In Untersuchungen, bei denen S und $|p_2(l_2)|$ gleichzeitig gemessen wurden, wurde die Proportionalität zwischen S und $|p_2(l_2)|^2$ bestätigt.

hörigen Frequenzkurven von $|p_2(l_2)|$ ermittelt. Aus diesen die mittlere Kurve ist in Abb. 6 graphisch dargestellt; sie wurde den Berechnungen zugrunde gelegt.

Die Dämpfungskonstante β_2 erhält man, wenn man die Frequenzkurve des Schalldrucks $|p_1(l_1)| = |p_2(0)|$ am Ende des ersten Rohres zu Hilfe nimmt und den Quotienten $|p_2(l_2)|/|p_2(0)| = 1/|\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2| = 1/\sqrt{\cos^2 k l_2 + \mathfrak{Sin}^2 \beta_2 l_2}$ bildet (s. Gl. (5)). In Abb. 7 sind in logarithmischer Darstellung zwei Paare zusammengehöriger Meßkurven $|p_2(l_2)|$ und $|p_1(l_1)|$ (Kurven I und II der Abb. 6) und die aus ihnen gewonnenen Quotientkurven (Differenzkurven in der logarithmischen Darstellung) dargestellt, die die be-

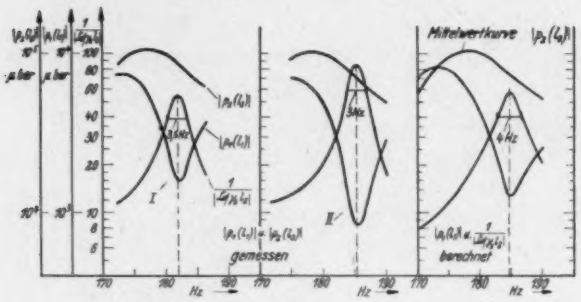


Abb. 7. Resonanzkurven $1/|\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2|$

kannte Glockenform der Resonanzkurven haben. Aus der Halbwertbreite von mehreren derartigen Resonanzkurven wurden Werte für die Dämpfungskonstante β_2 erhalten, die von der Größenordnung des theoretischen Wertes $\beta_2 = 3{,}7 \cdot 10^{-4}$ cm^{-1} waren (Gl. (2)). Bei den weiteren Berechnungen wurde dieser Wert benutzt.

Aus der Lage der Maxima der Resonanzkurven $1/|\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2|$ wurde ein Mittelwert l_2 entnommen; für die Frequenz der Maxima gilt die Beziehung $k l_2 = \pi/2$ oder $l_2 = \lambda/4 = c/4f$. Es ergab sich $l_2 = 46{,}5$ cm. Diese Länge ist 1,5 cm größer als die gemessene Länge des engen Rohres. Den Berechnungen wurden demgemäß die um 1,5 cm korrigierten gemessenen Rohrlängen zugrunde gelegt, also $l_1 = 105{,}5$ cm und $l_2 = 46{,}5$ cm.

Entgegen den theoretischen Annahmen sind die Wellen tatsächlich nicht eben bis zum Querschnittssprung des Rohrsystems. Wenn man in der Theorie vereinfachend die Wellen als überall im Rohrsystem eben ansehen will, hat man die Unstetigkeitsstelle der Schnelleamplituden der ebenen Welle (vgl. Gl. (4)) innerhalb des kleinen Bereiches in der Umgebung des Eingangs des engen Rohres anzunehmen, in dem im Experiment die Wellenfronten nicht eben sind. Nach der Lage der Resonanzstelle der Kurve $1/|\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2|$ wurde diese Sprungstelle in 1,5 cm Abstand vom Ende des weiten Rohres angenommen.

Es blieb die Dämpfungskonstante β_1 zu ermitteln. Gemäß den Gleichungen (5) besteht die Beziehung $|p_1(x_1)| = |p_2(l_2)|\,|N(x_1)|$. Nach dieser Gleichung wurden unter Benutzung der Mittelwertkurve $|p_2(l_2)|$ die Kurven $|p_1(x_1)|$ der Abb. 6 berechnet. In dem Ausdruck für $|N(x_1)|$ (Gl. (7)) wurde β_1 so gewählt, daß möglichst nahe die gemessenen Kurven $|p_1(x_1)|$ angenähert wurden. Dabei ergab sich ein Wert $\beta_1 \approx 5 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}, der um nahezu zwei Größenordnungen größer war als der theoretische Wert $\beta_1 \approx 8 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1} (Gl. (2)). Die starke Erhöhung der Dämpfung der Welle im ersten Rohr dürfte in der Hauptsache auf die Gummimembran zurückzuführen gewesen sein.

Es waren nunmehr alle Daten zur Berechnung von $|N_0|$ bekannt, und an Hand der Mittelwertkurve $|p_2(l_2)|$ wurde $|P_e| = |p_2(l_2)| \cdot |N_0|$ berechnet; die so gewonnene $|P_e|$-Kurve ist in Abb. 6 eingetragen. Zu Vergleichszwecken wurde der Schalldruck an verschiedenen Punkten der Eingangsblende des Rohrsystems[10]) in der aus Abb. 8 ersichtlichen Weise mit dem Quarzmikrophon gemessen.

Die Apparaturanordnung mußte dabei etwas geändert werden (insbesondere vergrößerter Abstand Lochscheibe—Eingang, also z. B. kleinere Strahlungsdämpfung). Die gemessenen Eingangsdruckkurven (Abb. 8) werden daher gegenüber denen, die man bei der Apparaturanordnung der übrigen Messungen zu erwarten gehabt hätte, etwas geändert sein.

Der Verlauf der berechneten $|P_e|$-Kurve (Abb. 6) ist dem der Eingangsdruckkurven der Abb. 8 in wesentlichen Zügen ähnlich; auch die

[10]) In der Rohrapparatur der Abb. 4 wurde am Eingang des dicken Rohres eine Blende der in Abb. 8 skizzierten Form benutzt. Die Längenkorrektion betrug in diesem Fall etwa $\Delta l_1 = 10$ cm. Die Lochscheibe war dicht an der Blende (Abstand < 1 cm), so daß nach dem Ergebnis der Messungen am Messingrohr von 25 cm Länge relativ große Strahlungsdämpfungen anzunehmen waren.

Beträge von P_e kommen den mittleren Beträgen der Kurvenschar der Abb. 8 nahe. Außerdem ergibt eine eingehende Diskussion des Ausdrucks $|P_e| = P|Z_e|/|Z_a + Z_e|$, die hier nicht wiedergegeben werden soll, mit Hilfe von Gl. (6) unter Annahme plausibler Werte für Real- und Imaginärteil von Z_a (Gl. (10)) und eines nahezu

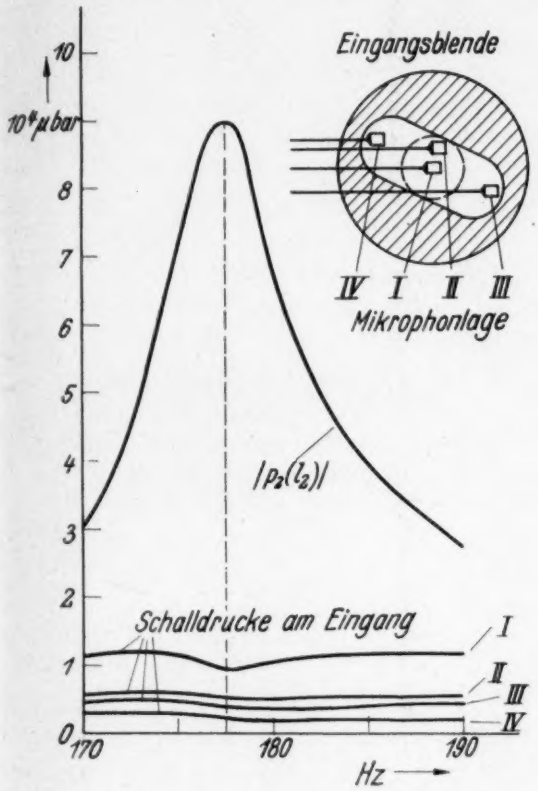


Abb. 8. Schalldrucke an verschiedenen Stellen der Eingangsblende des Rohrsystems

konstanten Schalldrucks P im Intervall 170 Hz $\leq f \leq$ 190 Hz einen Frequenzgang von $|P_e|$, der dem der $|P_e|$-Kurve der Abb. 6 im wesentlichen entspricht. Berechnet man $|P| = |P_e|\,|Z_a + Z_e|/|Z_e|$ mit Hilfe der $|P_e|$-Kurve (Abb. 6), kommt man zu Beträgen $|P|$, die dem halben Betrage des Staudruckes von $\sim$ 200 mm W. S. im unmodulierten Gebläsestrahl nahekommen.

Die berechneten Beträge und der Frequenzgang von $|P_e|$ sind nach diesen Ergebnissen im wesentlichen plausibel. Auch die Annäherung der gemessenen Kurven $|p_1(x_1)|$ durch die berechneten erscheint unter Berücksichtigung der vereinfachenden Annahmen der Theorie und im Hinblick auf die Abweichungen der Meßkurven untereinander befriedigend. Die Theorie des Abschnitts III erweist sich demnach als ausreichend zur Beschreibung der Wirkungsweise der in Abb. 4 dargestellten Apparatur, zumindest genügt sie für die Zwecke der planmäßigen Dimensionierung eines derartigen Rohrsystems und zur Abschätzung der in diesem erreichbaren Schalldrucke.

Es sollen hier einige Bemerkungen zur Frage der zweckmäßigen Dimensionierung angefügt werden. Das Verhältnis F_2/F_1 muß genügend klein gewählt werden; wie schon im Abschnitt II bemerkt wurde, hat es jedoch wegen des Anwachsens von β_2 mit $1/r_2$ keinen Sinn, eine gewisse Grenze F_2/F_1 zu unterschreiten, beispielsweise hätte man in der oben behandelten Apparatur durch eine Verkleinerung dieses Verhältnisses keine wesentliche Vergrößerung des Resonanzschalldrucks im engen Rohr erreicht. — Die Resonanzstellen des Systems bei gegebenen Verhältnissen F_2/F_1 bzw. r_2/r_1 und l_1/l_2 werden in dem Diagramm der Abb. 2 dargestellt durch den Schnittpunkt der durch den Nullpunkt gehenden Geraden $l_1/l_2 = \text{const.}$ mit den zum Parameter r_1/r_2 gehörenden Kurven. Wenn man an einer bestimmten Resonanzstelle möglichst große Schalldrucke $|p_2(l_2)|$ erzielen will, muß man r_1/r_2 genügend groß und l_1/l_2 so wählen, daß der die betreffende Resonanzstelle darstellende Schnittpunkt in der Abb. 2 in der Nähe einer der strichpunktierten Diagonalen liegt.

Diese Vorschrift ist folgendermaßen zu begründen. Damit $|p_2(l_2)| = P/|N_0|$ möglichst große Beträge annimmt, ist $|N_0|$ möglichst klein zu machen (in $|N_0|$ ist für l_1 die korrigierte Länge zu setzen und in β_1 die Strahlungsdämpfung einzubeziehen). Der Ausdruck für $|N_0|^2$ läßt sich in die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}|N_0|^2 = {} & (\cos k\,l_1 \cdot \cos k\,l_2 - (F_2/F_1) \cdot \sin k\,l_1 \cdot \sin k\,l_2)^2 \\ & + \mathfrak{Sin}^2\,\beta_1 l_1\,(\mathfrak{Cof}^2\,\beta_2 l_2 - (1 - (F_2/F_1)^2)\sin^2 k\,l_2) \\ & + (1 - (F_2/F_1)^2)\,\mathfrak{Sin}^2\,\beta_2 l_2 \cdot \cos^2 k\,l_1 \\ & + 2\,(F_2/F_1)\,\mathfrak{Sin}\,\beta_1 l_1 \cdot \mathfrak{Cof}\,\beta_1 l_1 \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta_2 l_2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\beta_2 l_2 \\ & + (F_2/F_1)^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\beta_1 l_1 \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\beta_2 l_2\,.\end{aligned}$$

In dem Grenzfall $F_2/F_1 \to 0$, $l_1 = l_2 = \lambda/4$ wäre nur der zweite Summand ungleich Null und $|N_0|^2 = \mathfrak{Sin}^2\,\beta_1 l_1 \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\beta_2 l_2$. Allgemein muß man, um den zweiten und den dritten Summanden im Ausdruck für $|N_0|^2$ möglichst klein zu machen, gleichzeitig $\sin^2 k\,l_2$ möglichst nahe gleich 1 und $\cos^2 k\,l_1$ möglichst klein, also $k\,l_1$ und $k\,l_2$ nahe gleich $((2n+1)/2)\,\pi$

machen. Aus dem Diagramm der Abb. 2 ersieht man sofort, daß man dazu die oben gegebene Vorschrift befolgen muß. Dabei ist zu beachten, daß es bei großem β_1 vor allem wichtig ist, den Klammerausdruck des zweiten Summanden möglichst klein zu machen, also $k\,l_2 \approx (2\,n+1)\,\pi/2$ zu wählen; im Falle der oben behandelten Apparatur beispielsweise lag der zu der näher untersuchten Resonanzstelle gehörende Kurvenpunkt im Diagramm Abb. 2 im Intervall $1/2 < l_1/\lambda < 3/4$ auf der in das Diagramm eingezeichneten gestrichelten Geraden $l_1/l_2 = \text{const}$.

Die Frequenzanalyse des Schalldrucks am Ende des engen Rohres nach dem Suchtonverfahren mit Hilfe des Quarzmikrophons ergab bei Resonanzschalldrucken $|p_2(l_2)|$ von etwa

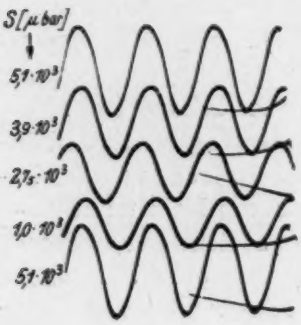


Abb. 9. Schwingungsformen des Resonanzschalldrucks bei verschiedenen Schallstrahlungsdrucken S (gemessen mit dem W. S.-Manometer)

10^5 μbar einen Klirrfaktor von weniger als 5%, die Analyse des zugehörigen Schalldruckes P_e auf die gleiche Weise (Messung in der Mitte der Eingangsblende) einen Klirrfaktor von etwa 30%. Man erhält also experimentell bei obertonreichem Eingangsschalldruck P_e die fast klirrfaktorfreien Resonanzschalldrucke $|p_2(l_2)|$, die nach der Theorie zu erwarten sind. In Abb. 9 sind die Schwingungsformen des Resonanzschalldrucks $|p_2(l_2)|$ bei verschiedenen Gebläsedrehzahlen im Oszillogramm wiedergegeben.

Es handelt sich in diesem Falle um Aufnahmen mit Hilfe eines Braunschen Rohres, bei denen ein verzerrungsfrei arbeitendes elektromagnetisches Mikrophon mit schallharter Membran benutzt wurde; die Frequenzkurve der Anordnung Mikrophon + Verstärker war bis oberhalb 1000 Hz geradlinig. Die Schwingungsamplituden in den Oszillogrammen sind den Schalldrucken $|p_2(l_2)|$ proportional.

Die erreichten maximalen Resonanzschalldrucke bei 180 Hz am Ende des engen Rohres betrugen etwa 10^5 μbar (Effektivwert), also etwa 0,1 Atm., die zugehörigen Schnelleamplituden in der Nähe des Schnellebauches am Eingang des engen Rohres, dessen Länge im vorliegenden Resonanzfall nahe gleich $\lambda/4$ war, $|v_2(0)| \approx |p_2(l_2)|/Z_0 \approx 25$ m/sec, die zu $|v_2(0)|$ gehörenden Teilchenamplituden vom Betrage $|v_2(0)|/\omega$ mit $\omega = 2\pi f$ etwa 2 cm.

V. Anwendungsmöglichkeiten der Methode

Die oben beschriebene Methode zur Erzeugung starker stehender Schallwellen bietet zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten, die bereits in der Einleitung kurz gestreift wurden, und auf die hier etwas näher eingegangen werden soll.

Die experimentellen Untersuchungen des vorigen Abschnitts haben gezeigt, daß die stehenden Wellen in dem Rohrsystem der Abb. 4 und 5 bei Schalldrucken von 10^5 μbar noch nicht merklich nichtlinear verzerrt sind. Bei Verwendung eines stärkeren Gebläses oder einer geeignet dimensionierten Rohrapparatur mit einem elektrodynamischen Schallsender wird es ohne größere Schwierigkeiten möglich sein, die Schallstärken so weit zu steigern, daß deutliche nichtlineare Verzerrungen auftreten.

Es gibt eine größere Zahl von theoretischen und experimentellen Arbeiten, die sich mit der ebenen Schallwelle großer Amplitude befassen[11]). Experimentelle Untersuchungen an tieffrequenten stehenden Wellen sehr großer Schallstärken in Luft wurden von E. Schmidt und Cl. Mayer-Schuchardt durchgeführt[12]), die die Wellen mit einer Kolbenmaschine in einem langen Rohr erzeugten. Dabei beobachteten sie im Resonanzfall „Unstetigkeiten" des zeitlichen Schalldruckverlaufs von der Art des Riemannschen Verdichtungsstoßes.

Im Abschnitt IV dieser Arbeit ergab sich beiläufig eine Methode, die Dämpfungskonstante β der axialen Schallwellen im Kundtschen Rohr bei sehr großen Schallstärken zu bestimmen (vgl. die Bestimmung von β_2 in Abschn. IV und Abb. 7).

K. O. Lehmann[13]) maß die Dämpfung stehender Wellen im Rohr bei großen Schalldrucken im Druckbauch bis hinauf zu $7{,}5 \cdot 10^4$ μbar (Frequenz 50 Hz)

[11]) L. Mjasnikov, Techn. Phys. USSR 5 (1938), S. 932; E. Fubini-Ghiron, Alta Frequenza 4 (1935), S. 530; 6 (1937), S. 640; Rev. d'Acoust. 6 (1937), S. 118; in den genannten Arbeiten weitere Literatur.

[12]) E. Schmidt, VDI (1935), S. 671; Cl. Mayer-Schuchardt, VDI-Forsch.-Heft 376 (1936).

[13]) K. O. Lehmann, Ann. (5), 21 (1934), S. 533.

und fand oberhalb von $3 \cdot 10^4$ μbar ein leichtes Ansteigen der Dämpfungskonstanten β infolge von Turbulenzerscheinungen. Bei den Messungen von β_2 in der vorliegenden Arbeit reichte die Meßgenauigkeit zur Feststellung dieses Anstiegs noch nicht aus; die Methode läßt sich aber ohne Zweifel so weit ausbauen, daß man auch mit ihr den Gang von β mit dem Schalldruck bis hinauf zu Drucken über 0,1 Atm mit befriedigender Genauigkeit verfolgen kann.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten für die Apparatur bieten sich beim Studium der Strömungsvorgänge und des Verhaltens kleiner Teilchen in starken Schallfeldern.

Seit den klassischen Rohrversuchen von A. KUNDT und V. DVOŘÁK sind zahlreiche Arbeiten über diese Probleme durchgeführt worden. Hierher gehören die Untersuchungen über das Wesen der KUNDTschen Staubfiguren, über die von DVOŘÁK entdeckten Zirkulationsströmungen in intensiven stehenden Wellen und über die Koagulation der Schwebeteilchen in Aerosolen. In diesem Zusammenhange seien beispielsweise die Arbeiten von E. N. DA C. ANDRADE[14]) genannt, der die DVOŘÁKschen Zirkulationsströmungen mit Hilfe von Rauch sichtbar machte und die Strombahnen mit den von RAYLEIGH berechneten verglich, und der in ähnlichen Versuchen als Ursache für die KUNDTschen Staubfiguren Wirbelvorgänge erkannte, ferner die Arbeiten von HIEDEMANN und Mitarbeitern über die Koagulation suspendierter Teilchen[15]). Es wird von Interesse sein, alle diese Fragen bei den extremen Schallstärken zu untersuchen, die mit der vorliegenden Apparatur erreicht werden können. Bei der Beobachtung der Bewegung von Korkstaubteilchen in dem engen Rohr der Abb. 4 zeigten sich ähnliche Erscheinungen wie bei den genannten Koagulationsversuchen, die bei hohen Frequenzen (10 kHz) durchgeführt wurden. Das enge Rohr (lichte Weite 4 cm) wurde dabei mit einer Glasplatte abgeschlossen und axial mit einer Bogenlampe ausgeleuchtet. Kleine Teilchen, die der Bedingung $r^2 f < 10^{-4}$ cm^2/sec genügen (r = Teilchenradius; vgl. BRANDT, FREUND und HIEDEMANN[15])), machen die Schwingungen der Luftteilchen vollständig mit und erscheinen dabei dem Auge als Striche. Bei Schalldrucken von 10^5 μbar im Druckbauch wurden im Schnellebauch Strichlängen von ~ 4 cm beobachtet entsprechend der doppelten Teilchenamplitude. In Abb. 10, in der Teilchenbewegungen im vorderen Teil des engen Rohres in der Nähe der Mündung in das weite Rohr gezeigt werden, sind nur die lichtstärkeren Bahnen größerer Teilchen ($r > \sim 10$ μ) sichtbar. Diese machen die Luftschwingungen nur noch teilweise mit und führen überdies Translationsbewegungen in allen möglichen Richtungen aus, wobei sie scharf geknickte Zickzackbahnen beschreiben (vgl. [15])).

Mit Hilfe suspendierter Rauch-, Nebel- oder Staubteilchen kann man in dem Rohrsystem die Vorgänge bei der Luftströmung um größere

Abb. 10. Staubteilchenbewegungen im Schallfeld

Hindernisse bei extremen Schallschnellen in der Weise sichtbar machen, wie dies zuletzt MERRINGTON und OATLEY[16]) im Fall der RAYLEIGHscheibe taten, die auf diese Weise den Einfluß der Wirbelablösungen am Rande der Scheibe auf deren Ausschläge untersuchten.

In technischer Hinsicht wird sich beispielsweise die Rohrapparatur zu einer Prüf- und Eichapparatur für Kondensator- und Kristallmikrophone entwickeln lassen, die besonders bei großen Schallintensitäten Verwendung finden sollen.

Nach Klarstellung des Zusammenhanges zwischen Schallstrahlungsdruck und Schalldruck dürfte sich eine Eichmethode verhältnismäßig großer Genauigkeit ergeben, denn die am Ende des engen Rohres auftretenden Strahlungsdrucke liegen in einem Bereich, der genaue Messungen in einfacher Weise mit dem Wassermanometer zuläßt. Von Vorteil bei der Prüfung des linearen Arbeitens der Mikrophone ist die Klirrfaktorfreiheit der großen Resonanzschalldrucke am Ende des Systems.

Die Apparatur wurde gelegentlich auch für einen Demonstrationsversuch benutzt, und zwar

[14]) E. N. da C. ANDRADE, Proc. Roy. Soc. (Lond.) 134 (1932), S. 445.

[15]) O. BRANDT u. H. FREUND, Z. Physik 94 (1935), S. 348; O. BRANDT, H. FREUND u. E. HIEDEMANN, Z. Physik 104 (1937) S. 511.

[16]) A. C. MERRINGTON und C. W. OATLEY, Proc. Roy. Soc., Lond. 171 (1939), S. 505.

wurden die Verdichtungen und Verdünnungen der Luft im Druckbauch am Rohrende des Systems mit Hilfe eines stroboskopisch beleuchteten Gummibläschens gewissermaßen sichtbar gemacht.

Das luftgefüllte Gummibläschen von 2 cm Durchmesser wurde am Ende des engen Rohres von 4 cm lichter Weite befestigt. Bei passender stroboskopischer Beleuchtung führt das Bläschen im Schallfeld für das Auge langsame Pulsationen aus, die bei den großen Schalldrucken von 0,1 Atm. ohne optische Hilfsmittel deutlich sichtbar sind. Die Elastizität des Gummis spielt dabei keine merkliche Rolle, und wenn man von den im Schallfeld auftretenden Gleichströmungen absieht, macht die in der Blase enthaltene Luftmasse im wesentlichen die Bewegungen, die sie auch in Abwesenheit der Gummihülle ausführen würde. Das Bläschen dient also lediglich dazu, die Volumenänderungen der von ihm eingeschlossenen kleinen kugelförmigen Luftmasse im Schallfeld sichtbar zu machen.

Die Auswahl der Anwendungsbeispiele der Rohrapparatur sei mit dem folgenden abgeschlossen. Man kann an das enge Rohr des Systems ein mit Wasser gefülltes Rohr gleichen Querschnitts anschließen. Als Trennwand zwischen beiden kann beispielsweise eine Gummimembran dienen. Wählt man die Länge der Wassersäule so, daß sie bei einer bestimmten Resonanzfrequenz des luftgefüllten Rohrsystems gleich der halben Schallwellenlänge im Wasser ist, so ist auch die Wassersäule bei der betr. Frequenz in Resonanz, und man erhält in ihrer Mitte Schalldrucke, die gegenüber dem am Eingang des Wasserrohres im Verhältnis $1/\beta l$ vergrößert sind (β und l bezogen auf die Wassersäule). Der Schalldruck am Eingang ist gleich dem großen Schalldruck $|p_2(l_2)|$ am Ende des luftgefüllten engen Rohres, und man kann u. U. im Druckbauch in der Mitte der Wassersäule bei genügend großem $|p_2(l_2)|$ und hinreichend kleiner Dämpfung der Schallwelle im Wasser Schalldrucke nahe gleich 1 Atm. erzielen, die beispielsweise zum Studium von Kavitationserscheinungen ausreichen dürften.

In diesem Falle beruht die erreichte Drucküberhöhung, die in dem luftgefüllten Rohrsystem mit Hilfe des Querschnittssprunges erreicht wurde, auf dem praktisch unendlich großen Verhältnis der Wellenwiderstände des Wassers und der Luft. Die Wasseroberfläche am Ende des engen luftgefüllten Rohres stellt praktisch für dieses einen schallharten Abschluß dar, während beide Enden des Wasserrohres als offen anzusehen sind. Für die Wassersäule tritt Resonanz deshalb dann ein, wenn die Länge der Säule gleich $\lambda/2$ ist, und der Druckbauch liegt in der Säulenmitte.

Zusammenfassung

In einem Rohrsystem der in Abb. 1 skizzierten Art lassen sich im Resonanzfall extrem große Schalldrucke und -schnellen in der Luftsäule des engeren Rohrteiles erzeugen. Die Theorie des Systems wird unter Berücksichtigung der Schallquelle durchgeführt und unter Verwendung einer Sirene als Schallquelle experimentell geprüft. Für diesen Fall werden Hinweise in bezug auf die zweckmäßige Dimensionierung des Systems gegeben. Im Druckbauch am Ende des engen Rohres wurden im Resonanzfall Schalldrucke von etwa 0,1 Atm. erzielt mit noch nahezu rein sinusförmigem zeitlichen Verlauf. Die Eigenfrequenzen des Systems sind nichtharmonisch, so daß auch bei obertonreichem Schallspektrum der Schallquelle am Ende des engen Rohres Resonanzschalldrucke mit kleinem Klirrfaktor erhalten werden. Die Anwendungsmöglichkeiten der Apparatur werden besprochen (Studium der Nichtlinearitäten in stehenden Wellen großer Amplitude, Eichung von Mikrophonen für große Schalldrucke, Demonstrationsversuche usw.).

Für wertvolle Anregungen habe ich Herrn Prof. Dr. E. MEYER zu danken.

(Eingegangen am 2. August 1939.)

Untersuchungen an Blockflöten

Von Arndt von Lüpke

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

(Mit 14 Textabbildungen)

I. Einleitung

Über die physikalischen Eigenschaften von Musikinstrumenten sind in letzter Zeit vielfach Untersuchungen angestellt; aus ihnen lassen sich teils physikalisch interessante Schlüsse ziehen, teils ergeben sich wertvolle Anregungen für Instrumentenbauer und Musiker. Die Untersuchungen erstrecken sich meist auf die Klangfarbe, nachdem zuerst MEYER und BUCHMANN[1]) für eine große Anzahl von Instrumenten die wichtigsten Klangspektren gemessen haben. Aber auch die Klangeinsätze sind mehrfach untersucht worden seit vor allem BACKHAUS[2]) auf deren Wichtigkeit hingewiesen hat. Von der großen Anzahl von Arbeiten sei nur auf einige in diesem Rahmen besonders interessierende verwiesen[3]), [4]), [5]), [6]).

Bei der zunehmenden Bedeutung der Blockflöte nicht nur in der Schul- und Volksmusik, sondern vor allem auch als Kammermusikinstrument erschien es angebracht, auch dieses Instrument, für das derartige Messungen bisher nicht vorliegen, einer näheren Untersuchung zu unterziehen. Die Arbeit enthält keine grundsätzlich neuen Methoden, doch werden die Ergebnisse für manchen vielleicht von Interesse sein.

II. Klangspektren

a) Versuchsanordnung

Die Klanganalyse wurde mit einem Filtersatz (aus dem Tonfrequenzspektrometer von Siemens & Halske) in Verbindung mit einem Registriergerät (dem NEUMANN-Pegelschreiber) ausgeführt, da auf diese Weise auch zeitliche

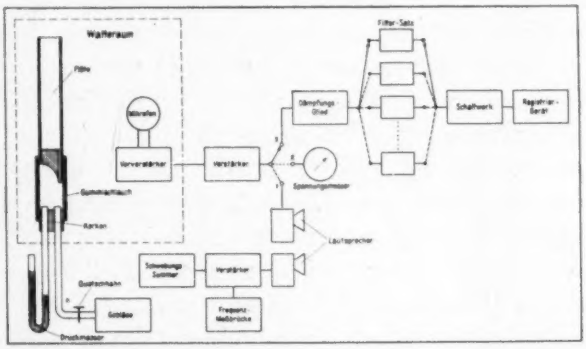


Abb. 1. Versuchsanordnung zur Aufnahme der Klangspektren und zur Messung des Winddruckes und Schalldruckes. Schalterstellung. 1. Einstellung der Tonhöhe; Schalterstellung. 2. Schalldruckmessung; Schalterstellung. 3. Klanganalyse

Schwankungen in der Stärke der einzelnen Teiltöne erfaßt werden konnten. Die logarithmische Anzeige des NEUMANNschreibers ermöglicht eine gute Erkennbarkeit auch schwacher Teiltöne und entspricht dem subjektiven Eindruck besser als eine lineare Anzeige.

Bei der Aufnahme der Spektren sollte das Ergebnis ein Registrierstreifen sein, auf dem unmittelbar die Stärke der einzelnen Teiltöne in logarithmischem Maß nebeneinander aufge-

---

[1]) E. MEYER und G. BUCHMANN, Die Klangspektren der Musikinstrumente. Abh. preuß. Akad. Wiss. 1931, S. 733, Nr. 32.

[2]) H. BACKHAUS, Über die Bedeutung der Ausgleichsvorgänge in der Akustik. Z. techn. Phys. 13 (1932), S. 31.

[3]) H. MEINEL, Akustische Eigenschaften klanglich hervorragender Geigen. Akust. Z. 4 (1939), S. 89.

[4]) V. ASCHOFF, Experimentelle Untersuchungen an einer Klarinette. Akust. Z. 1 (1936), S. 77.

[5]) M. GRÜTZMACHER und W. LOTTERMOSER, Neuere Untersuchungen an Flügeln. Akust. Z. 1 (1936), S. 49.

[6]) F. TRENDELENBURG, E. THIENHAUS und E. FRANZ, Klangeinsätze an der Orgel. Akust. Z. 1 (1936), S. 59, und Klangübergänge bei der Orgel, Akust. Z. 3 (1938), S. 7.

zeichnet ist. Dem stand entgegen, daß die Teiltöne nicht immer in der Mitte des Durchlaßbereiches eines Filters liegen und daher mit verschiedener Dämpfung angezeigt werden. Diese verschiedenen Dämpfungswerte wurden deshalb ebenso wie der Frequenzgang der ganzen Apparatur einschließlich Mikrophon vor der Messung ermittelt und durch Einschaltung eines Dämpfungsgliedes, dessen Einstellung vor Aufzeichnung jedes Teiltones verändert wurde, ausgeglichen. Während der Messung mußten nacheinander die Filter eingeschaltet werden, in deren Durchlaßbereich sich die zu messenden Teiltöne befanden. Damit hierbei ein regelmäßiges und übersichtliches Bild entstand, wurden die Eingangsklemmen des Registriergerätes durch ein von einem Synchronmotor angetriebenes Schaltwerk in regelmäßigen Abständen kurz geschlossen; in den so entstehenden Pausen wurde von Hand ein neues Filter eingeschaltet und die Einstellung des Dämpfungsgliedes entsprechend den vorher bestimmten Werten verändert. Auf diese Weise entstand eine Aufzeichnung, an der keine nachträglichen Korrekturen anzubringen waren.

Da der Durchlaßbereich der Filter $^1/_3$ Oktave beträgt, fallen von den höheren Teiltönen (etwa vom 6. ab) jeweils mehrere in den Bereich eines Filters. Bei dem verhältnismäßig grundtönigen Klang der Blockflöte spielen sich jedoch die wesentlichen Vorgänge in den unteren Teiltönen ab, so daß die zusammenfassende Darstellung der oberen Teiltöne für die Spektren von Blockflöten unbedenklich ist. Die genaue Zuordnung der einzelnen Felder gibt die nebenstehende Tabelle.

Aufgenommen sind alle Teiltöne bis zu einer Stärke von 1% der Amplitude des Grundtons; diese Grenze ist so festgelegt, daß die Teiltöne bei den leisesten Klängen noch eben über dem Störpegel der Apparatur und des Raumes liegen. Der Ausschlag für den Grundton wurde durch ein vor dem Filtersatz liegendes Potentiometer immer auf den gleichen Wert eingestellt. Der Klirrfaktor der Anordnung wurde durch Einführen einer Summerspannung untersucht. Obwohl diese nicht obertonfrei war, ergaben sich am Ausgang so niedrige Werte für die Obertöne, daß die Meßergebnisse in keinem Falle dadurch beeinflußt wurden.

Zuordnung der Teiltöne zu den Feldern der Klangspektren in Abb. 2 und 3

n	Das n-te Feld von links im Spektrum enthält bei den Klängen folgende Teiltöne			
	f, a, cis	fis, ais, d	g, h, dis	gis, c, e
1	1.	1.	1.	1.
2	2.	2.	2.	2.
3	3.	3.	3.	3.
4	4.	4. u. 5.	4.	4.
5	5.	5. u. 6.	5.	5.
6	6.	7.	6. u. 7.	6. u. 7.
7	7. u. 8.	8. + 9.	8. u. 9.	7. u. 8.
8	9. u. 10.	10.—12.	10. u. 11.	9.—11.
9	11.—13.	13.—15.	12.—14.	11.—14.

Um meßbare und reproduzierbare Verhältnisse zu haben, wurden die Flöten mit Hilfe eines Staubsaugers angeblasen und befanden sich zur Vermeidung von stehenden Wellen mit dem Mikrophon zusammen in einem schallgedämpften Raum, das Mikrophon in 1,2 m Entfernung in der auf dem Labium errichteten Senkrechten zur Flötenachse. Das maschinelle Anblasen ist für den stationären Klang gleichwertig mit dem Anblasen durch den Mund, da der Klang durch die Mundstellung nicht beeinflußt wird. Die Grifflöcher wurden mit Korken, Gummiband und Gummistückchen dem jeweiligen Griff entsprechend verschlossen.

Die Frage: mit welchem Winddruck sind die Flöten anzublasen? wurde so beantwortet, daß jeder Ton mit dem Druck angeblasen wurde, der zur Erreichung der vorgeschriebenen Tonhöhe nötig war. Dies entspricht den Verhältnissen, wie sie beim wirklichen Spiel herrschen, abgesehen davon, daß ein Anblasen mit konstantem Winddruck überhaupt nicht möglich ist. Die Einstellung der Tonhöhe ging so vor sich: Die Spannung eines Schwebungssummers, dessen Frequenz mit der Frequenzmeßbrücke auf $\pm$ 0,5 Hz genau eingestellt war, wurde über einen Verstärker an einen Lautsprecher gelegt; der Winddruck wurde dann so eingeregelt, daß die Schwebungsfrequenz zwischen diesem Ton und dem Grundton der Flöte (durch den Abhörlautsprecher vermittelt) kleiner als 1 Hz war.

b) Ergebnisse

Von den fünf Flöten, deren Klangspektren von jeder spielbaren Note im Bereich von zwei Oktaven aufgenommen wurden, sind zwei Tafeln in Abb. 2 und 3 wiedergegeben. Aus ihnen ist zunächst folgendes zu sehen:

1. Im Vergleich zu fast allen anderen Musikinstrumenten ist der Klang sehr grundtönig. (Man lasse sich nicht durch die logarithmische Darstellung täuschen!)
2. Der dritte Teilton (die Duodezime) ist im allgemeinen stärker als der zweite (die Oktave), was in bekannter Weise durch die konische Bohrung bedingt, also für die Blockflöte als konische Flöte charakteristisch ist.
3. Bei verschiedenen Klängen haben einzelne Teiltöne erhebliche Schwankungen in der Amplitude, was dem betreffenden Klang eine gewisse Rauhigkeit verleiht. Der Klang hört sich um so klarer an, je ruhiger die Teiltöne stehen.
4. Die Anzahl und Stärke der Obertöne nimmt mit aufsteigender Tonleiter bei allen Flöten stark ab, bis zur Gegend der Oktave. An der Grenze, von der ab die Flöte überblasen wird (gis''), nimmt sie plötzlich wieder stark zu und bleibt etwa so in der ganzen oberen Oktave. Die Erklärung ist darin zu sehen, daß die relative Weite, d. h. das Verhältnis des Durchmessers zur Länge, bei den tiefen Tönen am kleinsten ist, wodurch bekanntlich der Klang obertöniger wird als bei weiter Mensur. In der oberen Oktave ist die relative Weite dieselbe wie in der unteren; daß die höchsten Töne auch obertönig sind, liegt am Ansteigen des Winddrucks (s. Abb. 8).
5. Die Verschiedenartigkeit der Spektren wird übersichtlicher, wenn man den Verlauf einzelner Teiltöne bei allen Flöten zusammenfaßt, wie dies in Abb. 4—7 geschehen ist. In Abb. 4 ist auffallend die Gleichmäßigkeit der Zickzackbewegung von h' bis a''. Ver-

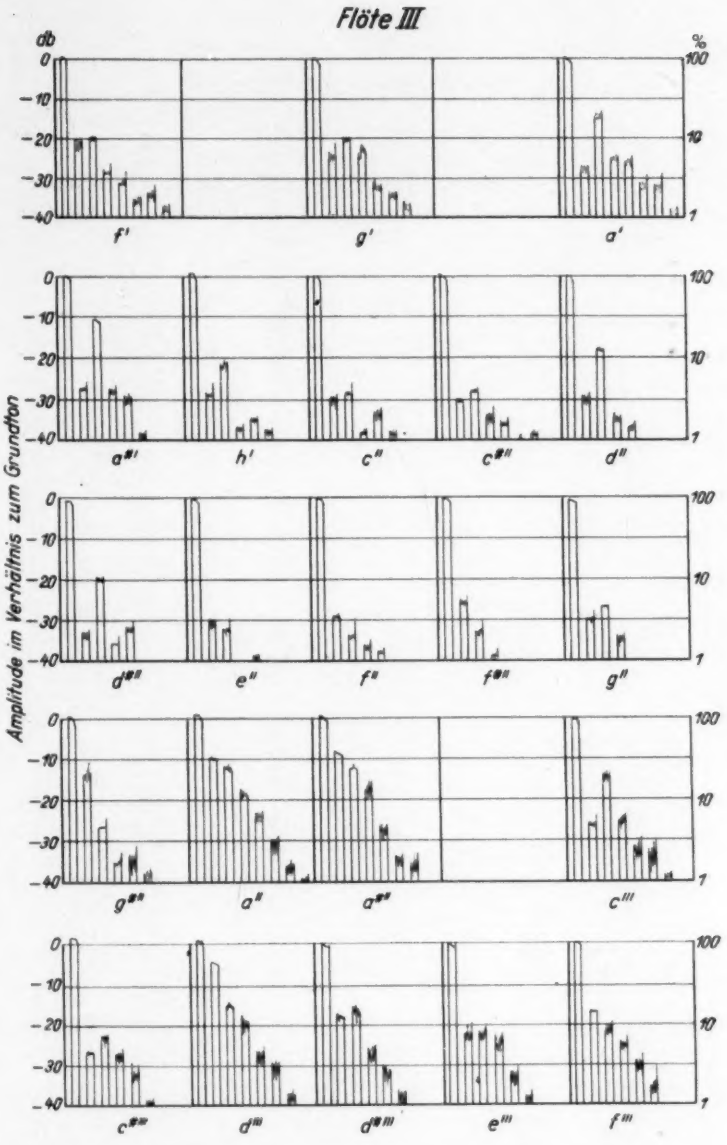


Abb. 2. Klangspektren für alle spielbaren Stufen einer obertonarmen Altflöte in f' bis zur zweiten Oktave. Das erste Feld ist jedesmal der Grundton, das zweite die Oktave usw.; vom fünften Feld ab sind teilweise mehrere Teiltöne in einem Feld enthalten (s. Tabelle auf S. 40)

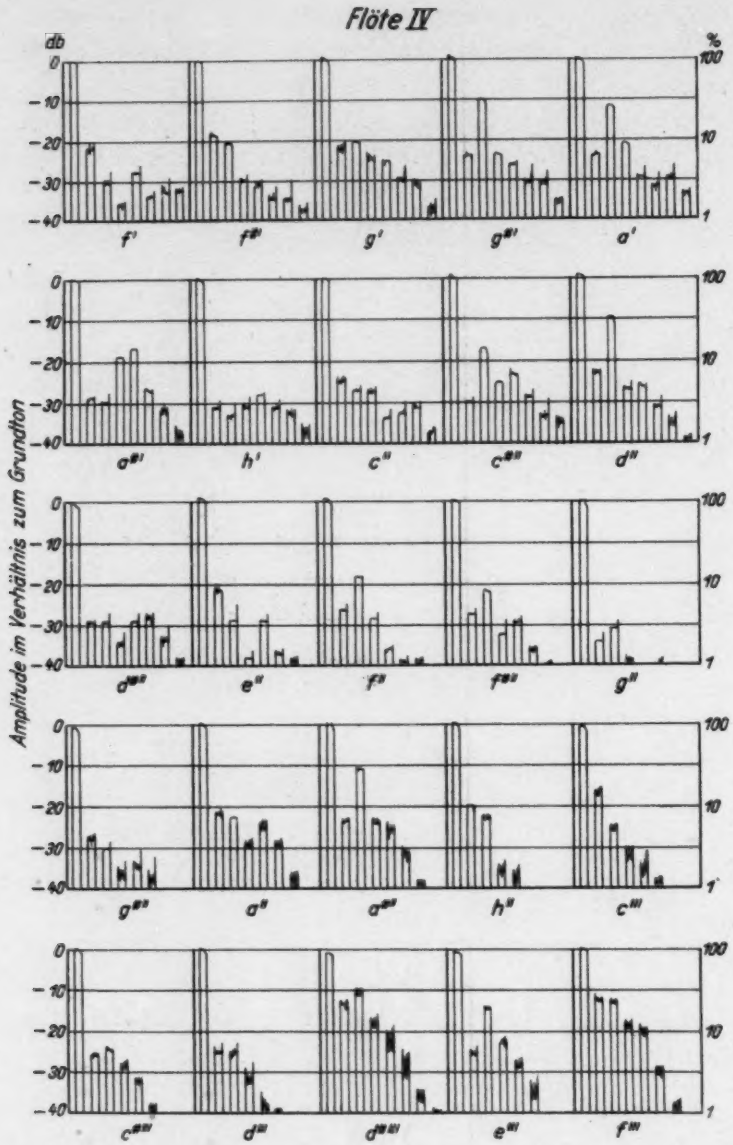


Abb. 3. Klangspektren für alle spielbaren Stufen einer obertonreichen Altflöte in f′ bis zur zweiten Oktave

gleicht man damit, welche Griffe Gabelgriffe[7]) sind, und welche nicht, so ergibt sich eine vollkommene Übereinstimmung (mit Ausnahme der Flöte III, die diese Erscheinung merkwürdigerweise überhaupt nicht zeigt). Die Gabelgriffe zeichnen sich also nicht dadurch aus, daß sie obertöniger sind, wie teilweise behauptet wird, sondern im Gegenteil durch besonders schwache Ausbildung der Oktave. Bei den übrigen Teiltönen ist kein Unterschied festzustellen. Zu beachten ist, daß die Sonderstellung der Gabelgriffe beim Überblasen wegfällt (dies ist verständlich, da wegen der Öffnung des Überblasloches eigentlich alle Überblasgriffe Gabelgriffe sind) und daß es Flöten gibt, bei denen überhaupt kein Unterschied zwischen Gabelgriffen und den übrigen Griffen auftritt. Der Verlauf der anderen Teiltöne ist stark schwankend, jedoch bei allen Flöten ziemlich einheitlich, besonders deutlich ist immer der Sprung an der Überblasgrenze.

III. Winddruck und Schalldruck

Der Winddruck wurde an einem Wassermanometer (Windwaage) und der Schalldruck am Ausgang des geeichten Verstärkers an einem frequenzunabhängigen Spannungsmesser mit konstantem Innenwiderstand abgelesen. Die Abb. 8 und 9 zeigen für fünf verschiedene Alt-f′-Flöten den Verlauf des Winddruckes, der nötig ist, um den richtigen Ton in temperierter Stimmung zu erzielen[8]) und des dabei gemessenen Schalldrucks. Wo mehrere Griffe in Frage kamen, wurden diejenigen verwendet, bei denen die Winddruckkurve am gleichmäßigsten verläuft. Die Winddruckkurven zeigen grundsätzlich alle

[7]) Als Gabelgriffe werden die Griffe bezeichnet, bei denen unterhalb von einem offenen Loch noch ein oder mehrere Löcher gedeckt sind.

[8]) Die Flöten waren alle für den Stimmton a′ = 435 Hz gebaut. Diese Stimmung gilt jedoch bei einzelnen Flöten für 18°, bei anderen für den eingespielten Zustand. Die Messung wurde daher bei allen Flöten bei der dazwischenliegenden Temperatur von etwa 25° durchgeführt.

den gleichen Verlauf. Aus ihnen ist folgendes zu sehen:

1. Der Bereich, innerhalb dessen die für die einzelnen Stufen erforderlichen Winddrucke liegen, ist etwa 1 : 6. Im Verhältnis zur Orgel liegt er sehr tief: erst bei den höchsten Stufen kommt der Winddruck in die Größenordnung der niedrigsten bei Orgeln vorkommenden Drucke. Dies dürfte ein Grund dafür sein, daß Blockflöten trotz ähnlicher Bauweise mit verschiedenen Lippenpfeifen der Orgel sich im Klang doch noch wesentlich von diesen unterscheiden.
2. Die Winddruckkurve zeigt unmittelbar die Reinheit einer Flöte: je gleichmäßiger die Kurve verläuft, d. h. je kleinere Winddruckänderungen nötig sind, um die einzelnen Töne sauber zu blasen, um so besser ist die Flöte in sich gestimmt.
3. Der Anstieg zu den höchsten Tönen hin ist ein Maß für die Überblasfähigkeit einer Flöte: die Flöten II, IV und V sprechen in den hohen Lagen leicht, I und III schwer an.

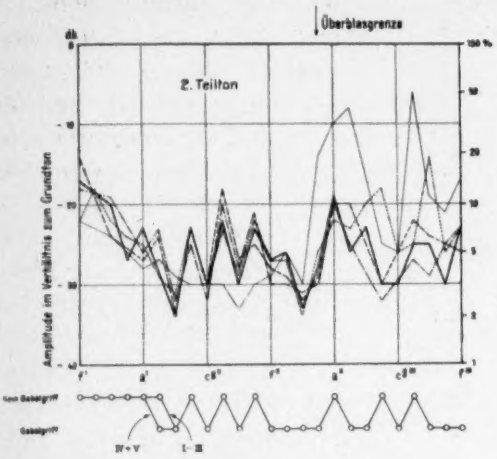


Abb. 4

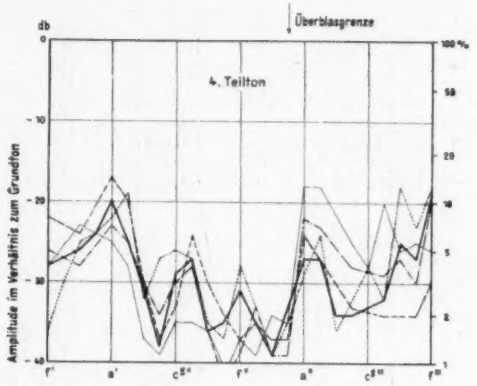


Abb. 6

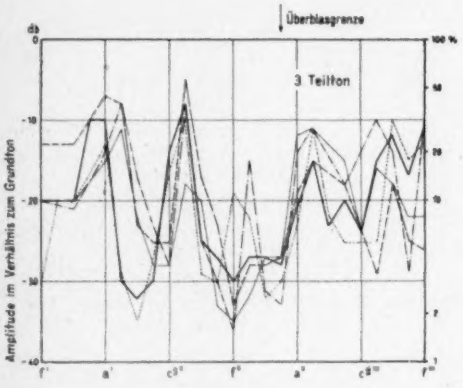


Abb. 5

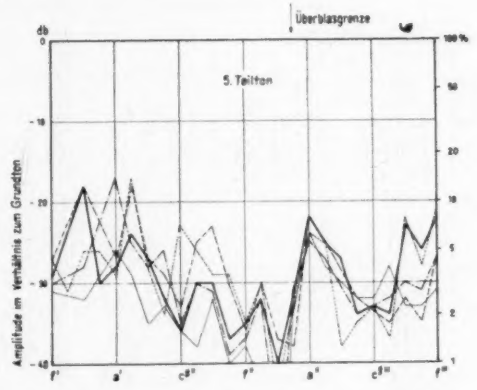


Abb. 7

Abb. 4—7. Stärkeverlauf von einzelnen Teiltönen im Verhältnis zum Grundton bei fünf Altflöten in f'

Bei den Schalldruckkurven ist besonders bemerkenswert der Sprung an der Überblasgrenze (bei gis''). Auch hier muß eine gewisse Gleichmäßigkeit als Kennzeichen einer guten Flöte angesehen werden. In der Tat ist bei den Flöten IV und V, deren Preis etwa doppelt so hoch ist wie der der übrigen, der Sprung bedeutend niedriger.

IV. Klangeinsätze

Die Klangeinsätze konnten mit der beschriebenen Analysiereinrichtung nicht untersucht werden, da die Einschwingzeit der Filter etwa 0,1 sec beträgt, was hierfür nicht ausreicht. Deshalb wurde die von TRENDELENBURG und FRANZ[9]) entwickelte Oktavsieb-Oszillographie

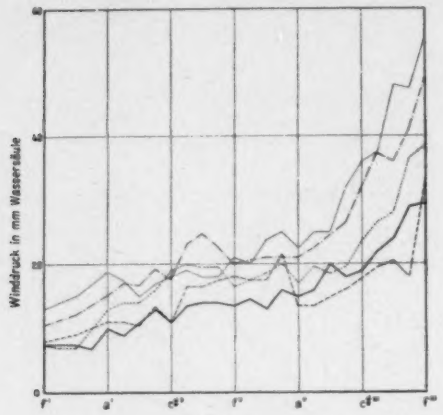


Abb. 8

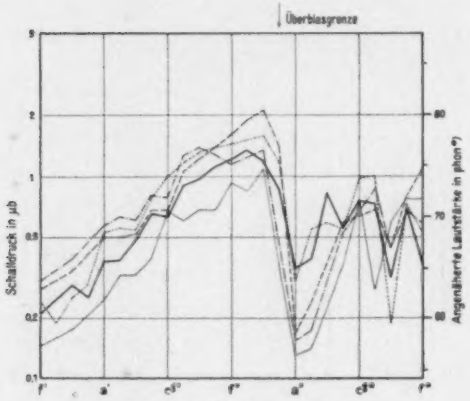


Abb. 9

Abb. 8 und 9. Winddruck- und Schalldruckkurven der fünf untersuchten f'-Flöten beim Anblasen in temperierter Stimmung. Wegen Nichtberücksichtigung der Ohrbewertung ist die Lautstärke bei f' um $2^1/_2$ phon niedriger als angegeben. Für die höheren Töne ist der Fehler kleiner, oberhalb ais' < 1 phon

benutzt, die bei größerer Bandbreite und dementsprechend kleinerer Einschwingzeit die Einschwingvorgänge gut wiedergibt.

Die Flöten wurden durch den ersten Spieler des Berliner Blockflötenquartetts, Herrn RUËTZ[10]), im schallgedämpften Raum mehrere Male hintereinander auf derselben Tonhöhe angeblasen. Hiervon wurde eine Schallplatte geschnitten, die Platte mit jeder Einstellung eines Oktavsiebes neu abgespielt und der Vorgang mit einem Dreischleifen-Oszillographen aufgezeichnet. Dabei zeichnete eine Schleife jedesmal den Gesamtklang, die zweite den vom Oktavsieb ausgesiebten Teilklang und die dritte eine Zeitmarke von 50 Hz auf. In den Abbildungen sind Gesamtklang und Zeitmarke nur einmal gebracht.

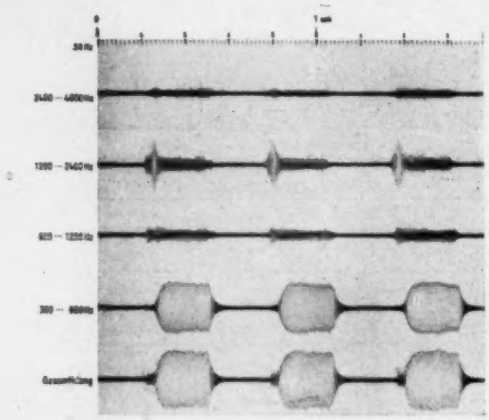


Abb. 10. Einsätze des Klanges gis' = 411 Hz auf einer Altflöte in e'

Abb. 10 zeigt das Oszillogramm einer Flöte, die sich durch ihren charakteristischen Einsatz auszeichnet, den man am besten mit „Spucken" bezeichnen kann. Hierdurch ergibt sich vor allem im mehrstimmigen Spiel ein durchsichtiger und präziser Klang von besonderem Reiz[6]). Im Oszillogramm zeigt sich dies durch das Auftreten einer starken Komponente im Bereich 1200—2400 Hz, die nach etwa 0,06 sec fast verschwunden ist. Die Abb. 11—13 zeigen Klangeinsätze bei der gleichen Stufe von Sopran-c"-Flöten verschiedener Bauart. Hier tritt die den Einsatz kennzeichnende Zacke nicht in der zweiten, sondern in der ersten Oktave (800 bis 1600 Hz) über dem Grundton auf. Man beachte ferner das Anschwellen der höheren Teiltöne

[9]) F. TRENDELENBURG und E. FRANZ, Untersuchungen an schnell veränderlichen Schallvorgängen. Z. techn. Phys. 16 (1935), S. 513.

[10]) Herrn MANFRED RUËTZ sei für seine Hilfe und das zur Verfügungstellen von Instrumenten herzlich gedankt.

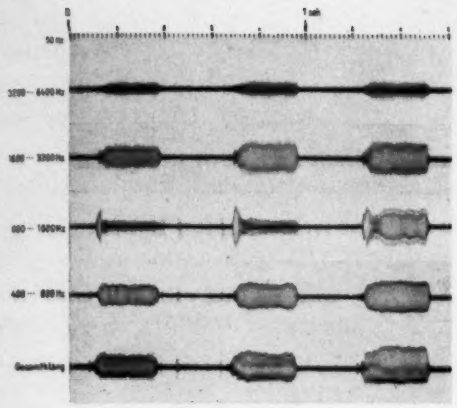


Abb. 11

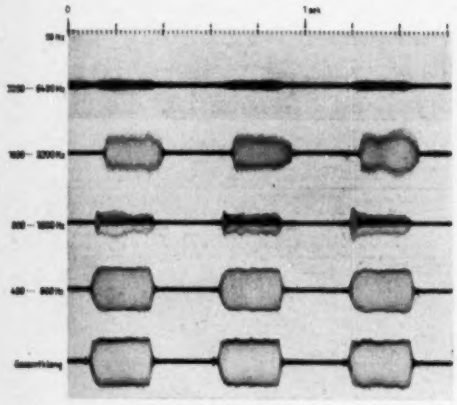


Abb. 12

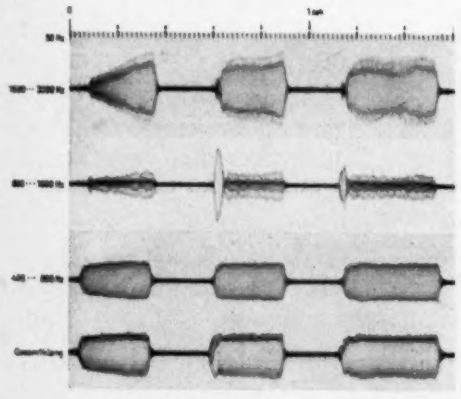


Abb. 13

Abb. 11—13. Einsätze des Klanges e″ auf Sopranflöten in c″; Abb. 11: „Renaissanceflöte", Abb. 12: „Chorflöte", Abb. 13: „Meisterflöte"

bei der ersten Note von Abb. 13. Ein crescendo des Spielers wirkt sich also in diesem Falle auf den Grundton sehr wenig aus, beeinflußt dagegen die Klangfarbe, eine Tatsache, die sich auch beim Vibrato sehr günstig auswirken kann. In diesem Falle ist der Vorläufer durch den niedrigen Anblasdruck fast unterdrückt, wie überhaupt die einzelnen Noten im Einsatz stark voneinander abweichen.

V. Folgerungen für die Beurteilung von Blockflöten

Bisher haben wir hierfür folgende Anhaltspunkte:

1. Die Sauberkeit der Stimmung ist an der Gleichmäßigkeit der Winddruckkurve zu erkennen.
2. Das Ansprechen in den hohen Lagen wird durch den erforderlichen Winddruck angegeben.
3. Die Ausgeglichenheit in der Lautstärke wird durch die Schalldruckkurve angegeben. Besonders wichtig ist dabei die Größe des Sprunges an der Überblasgrenze.
4. Auf Grund der Klangspektren lassen sich die Instrumente einteilen in mehr oder weniger obertönige. Die Beurteilung wird jedoch im wesentlichen eine Geschmacks- und Stilangelegenheit bleiben. Vielleicht könnte ein Hervortreten der für den Blockflötenklang charakteristischen ungradzahligen Teiltöne günstig beurteilt werden (man beachte, daß anscheinend aus diesem Grunde die Gabelgriffe vielfach bevorzugt werden). Solche Fragen könnten jedoch nur durch Vergleich mit der subjektiven Beurteilung durch einen Kreis von Sachverständigen entschieden werden.
5. Dasselbe gilt von den Einschwingvorgängen. Ein gewisser Vorläufer scheint jedoch günstig zu sein, da er den Einsatz schneller und präziser macht.
6. Die Konstanz der Teiltöne ist offenbar wesentlich für eine klare Tongebung, flackernde Teiltöne machen den Klang rauh und unruhig. Ob diese Rauheit jedoch immer ungünstig beurteilt wird, ist fraglich.
7. Als weitere Gesichtspunkte könnten in Frage kommen die Abhängigkeit der Klangfarbe und der Tonhöhe vom Winddruck (die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Temperatur ist eine Angelegenheit der Luft und deshalb für alle Flöten gleich). Doch sind von einer

Untersuchung der Klangfarbenabhängigkeit keine wesentlichen Ergebnisse zu erwarten außer der Zunahme der Obertönigkeit mit zunehmendem Winddruck; im übrigen ist der beim Spielen vorkommende Winddruckbereich der einzelnen Stufe sehr gering. Für

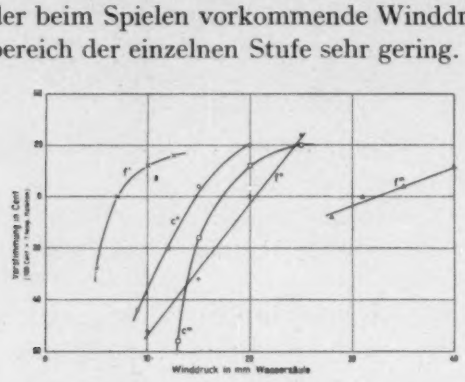


Abb. 14. Beispiele für die Abhängigkeit der Tonhöhe vom Winddruck bei einer Altflöte

die Tonhöhenabhängigkeit gibt Abb. 14 einige Beispiele, die zeigen, daß der Verlauf bei einer Flöte sehr wechselnd sein kann. Es ist anzunehmen, daß eine möglichst geringe Beeinflussung der Tonhöhe durch den Winddruck als günstig beurteilt wird.

Zusammenfassung

Die klanglichen Eigenschaften von verschiedenen Blockflöten werden mit Hilfe der Klanganalyse und Oktavsieboszillographie untersucht. Unter anderem wird dabei das unterschiedliche Verhalten der Gabelgriffe auf die Stärke des zweiten Teiltons zurückgeführt, und bei den Klangeinsätzen werden ähnliche Vorläufer wie bei Orgelpfeifen bestimmter Bauart gefunden. Für die Güte der Instrumente geben unter anderem die Kurven des Winddruck- und des Schalldruckverlaufes Aufschluß, indem aus ihnen die Reinheit, Ausgeglichenheit und Überblasfähigkeit zu erkennen ist. Es scheint infolgedessen möglich zu sein, schon ohne die wesentlich schwierigere Untersuchung der Klangspektren und Klangeinsätze wesentliche Aussagen über die Güte einer Flöte zu machen.

(Eingegangen am 8. August 1939.)

Über das Ersatzschema des Kugelknalls

Von L. Cremer

(Mit 3 Textabbildungen)

Im letzten Heft der Akustischen Zeitschrift erschien eine ausführliche Untersuchung von W. Weber[1]), welche sich experimentell und theoretisch mit dem Schallspektrum von Knallfunken und Knallpistolen befaßt. Die hier gewählte zusammenfassende Bezeichnung Kugelknall soll andeuten, daß ein solcher Knallvorgang im Freien eine Kugelwelle auslöst. Die genannten Untersuchungen zeigen, daß das Spektrum eines solchen Kugelknalles bei tiefen Frequenzen proportional der Frequenz ansteigt, bei hohen Frequenzen umgekehrt proportional derselben abfällt. Dazwischen liegt ein flaches Maximum. Dieser Charakter des Spektrums ist unabhängig von der Stärke des Knalles, dasselbe verschiebt sich lediglich mit wachsender Knallenergie gegen tiefere Frequenzen. Auf Grund dieses Befundes behandelt Weber den Kugelknall durch das in Abb. 1a skizzierte Ersatzschema, welches besagen soll:

Der beim Knall entstehende Druck sinkt zunächst durch eine sehr schnell verlaufende Expansion auf etwa 0,15 Atü. Je nach der vorhandenen Energie beansprucht dieses Druckgebiet einen Kugelraum von einem größeren oder kleineren Radius r. Dies entspricht der ähnlichen Verschiebung des Knallspektrums gegen tiefere Frequenzen. Außerhalb dieser Kugel herrscht zunächst atmosphärischer Druck und die Luft befindet sich in Ruhe. Dieses

[1]) W. Weber, Akust. Z. 4. (1939), S. 373.

wird als Anfangszustand für einen sich anschließenden rein akustischen Ausgleichsvorgang angesehen, wobei die schraffierte Kugel mit dem Überdruck P_0 als reine Federung behandelt wird.

WEBER versucht auch die Berechtigung dieses aus seinen Versuchen gefolgerten Schemas theoretisch zu begründen. Hierbei behandelt er zunächst die Kugelimpedanz als konstante reelle Größe und erhält für den Ausgleichsvorgang ein einfaches Exponentialgesetz, bei welchem diese konstante Impedanz im Exponenten erscheint. Er führt erst nachträglich bei der Berechnung des hierzu gehörigen Spektrums die wirkliche Frequenzabhängigkeit der Kugelimpedanz ein. Das so erhaltene Spektrum ergab eine gute Übereinstimmung mit dem experimentell gefundenen.

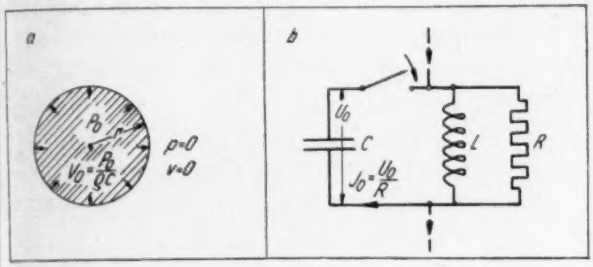


Abb. 1. Ersatzschema des Kugelknalls
a) akustisch; b) elektrisch

Im folgenden wird eine Ableitung des Kugelknalls unter Benutzung des gleichen Ersatzschemas gegeben, bei welcher von vornherein der komplexe und frequenzabhängige Charakter der Kugelimpedanz berücksichtigt wird. Dabei zeigt sich, daß das vorliegende Problem zu bekannten Ausgleichsvorgängen in einfachen Schwingungskreisen führt, deren Zeitverlauf den Knalloszillogrammen sehr ähnlich ist.

Hierbei kommt uns eine Darstellung des Strahlers nullter Ordnung zustatten, die vor kurzem von URK und VERMEULEN[2]) gegeben wurde. Die Strahlungsimpedanz eines solchen Strahlers wurde bisher meist in die Reihenschaltung einer mitschwingenden Masse und eines Strahlungswiderstandes zerlegt:

$$3 = \frac{\varrho c}{1 - i\left(\frac{c}{\omega r}\right)} = \left[\frac{\varrho c}{1+\left(\frac{c}{\omega r}\right)^2}\right] + i\omega\left[\frac{\varrho r}{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2+1}\right] \tag{1}$$

ϱ = Dichte der Luft,
c = Schallgeschwindigkeit
ω = Kreisfrequenz.

Dabei sind beide Anteile frequenzabhängig. In diesem Sinne erklärt auch WEBER das Anwachsen des Knallspektrums bei tiefen Frequenzen durch die zunehmende Verbesserung des Strahlungswiderstandes. Man erhält aber, worauf URK und VERMEULEN hinwiesen, die gleiche Impedanz mit frequenzunabhängigen Größen, wenn man Strahlungswiderstand und mitschwingende Masse in Parallelschaltung einführt:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{\varrho c} + \frac{1}{i\omega\varrho r}. \tag{1a}$$

Die Bewegung an der Oberfläche der Kugel hat die beiden nebeneinander wirkenden Möglichkeiten, entweder im Sinne des quasistationären Nahfeldes auszuweichen oder im Sinne einer abgehenden Schallwelle. Diese zweite Darstellung eignet sich auch für Vorgänge, die nicht harmonisch verlaufen. Elektrisch entsteht dieselbe Impedanz durch Parallelschaltung eines Widerstandes und einer Induktivität.

Das WEBERsche Ersatzschema bedeutet nun, daß wir diese Strahlungsimpedanz der Kugel im Zeitpunkt $t = 0$ an eine mit dem Druck P_0 aufgeladene Federung, bzw. an einen mit der Spannung U_0 aufgeladenen Kondensator anschalten (siehe Abb. 1b). Damit haben wir den Kugelknall auf ein einfaches Problem der Schwingungslehre zurückgeführt. Der Entladevorgang vollzieht sich dabei nach der Gleichung:

$$U = U_0 e^{-\delta t}\left(\cos\Omega t - \frac{\delta}{\Omega}\sin\Omega t\right). \tag{2}$$

Hierin ist im elektrischen Falle zu setzen:

$$\delta = \frac{1}{2RC};\quad \Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2};\quad \Omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

[2]) A. TH. VAN URK und R. VERMEULEN, Philips techn. Rdsch. 4, (1939), S. 225.

Beim Kugelknall entsprechen, wenn wir die Spannung mit dem Druck, den Strom mit der Schallschnelle vergleichen:

der Widerstand R — dem Schallwiderstand ϱc

die Induktivität L — der scheinbar mitschwingenden Luftmasse dividiert durch die Kugeloberfläche: ϱr

die Kapazität C — der Federung des Kugelvolumens dividiert durch die Kugeloberfläche: $\frac{1}{\varrho c^2} \cdot \frac{r}{3}$.

Setzt man diese Ausdrücke ein, so erhält man für den Druckverlauf im Innern der Kugel:

$$(2a) \quad p = P_0 e^{-1{,}5\frac{ct}{r}} \left(\cos 0{,}866 \frac{ct}{r} - 1{,}73 \sin 0{,}866 \frac{ct}{r}\right)$$

und an jedem außerhalb im Abstand a vom Mittelpunkt gelgenen Beobachtungspunkt, entsprechend der Divergenz des Strahlungsfeldes:

$$(2b) \quad p = P_0 \frac{r}{a} e^{-1{,}5\frac{ct'}{r}} \left(\cos 0{,}866 \frac{ct'}{r} - 1{,}73 \sin 0{,}866 \frac{ct'}{r}\right),$$

wobei die Zeit t' vom Eintreffen der Knallwellenfront am Beobachtungspunkt ab gerechnet ist:

$$ct' = ct - a.$$

In Abb. 2 ist dieser Verlauf eingezeichnet. In Übereinstimmung mit bekannten Oszillogrammen[3]) ergibt sich eine sehr spitz verlaufende erste Halbwelle, der sich eine wesentlich längere, dafür aber wesentlich schwächere negative Halbwelle anschließt. (Dabei gilt $\int_0^\infty p\,dt = 0$; die überschießenden und unterschießenden Flächen sind also gleich.) Da der Quotient von δ zu Ω_0 im obigen Ersatzschema 0,87 beträgt, so folgt daraus, daß wir uns bereits in der Nähe des aperiodischen Grenzfalles befinden, für welchen δ gleich Ω_0 ist. Bei den bisher bekannten Knalloszillogrammen scheint die Dämpfung meist noch schwächer zu sein, was u. a. damit zusammenhängen kann, daß das Innere der als reine Federung angesetzten Kugel ja auch noch bewegte Massen enthält. Auch in den Anfangsbedingungen vernachlässigen wir eine Bewegung in der Überdruckkugel und lassen nur die durch den sehr plötzlich auftretenden Druck P_0 gegebene Schnelle $P_0/\varrho c$ an der Oberfläche zu. Trotzdem ist eine grundsätzliche Ähnlichkeit der Abb. 2 mit den bekannten Knalloszillogrammen festzustellen. Dabei kann in Wirklichkeit die Spitze nur abgerundet in Erscheinung treten.

[3]) Z. B. SCHINDELIN, Ann. Phys., Lpz. V, 2, (1929), S. 129.

Das Spektrum des durch Gleichung (2) gegebenen Ausgleichvorgangs ist bekannt. Es ergibt sich am einfachsten aus folgender physikalischer Überlegung: Der zugrunde gelegte Anfangszustand wird erhalten, wenn wir im elektrischen Falle auf das in Abb. 1b skizzierte Ersatzschema durch die gestrichelt eingetragene Zuführung einen kurzen Stromstoß schicken. Dieser wird den elektrischen Energiespeicher aufladen, aber er kann nicht in den magnetischen Energiespeicher eindringen. Da nun ein solcher Stromstoß alle Teilfrequenzen mit gleicher Stärke enthält:

$$I(t) = \frac{U_0 C}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega t\, d\omega = \frac{U_0 C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\, d\omega,$$

(I Stromstärke, $U_0 C$ Ladung des Stromstoßes),

so ist das Spannungspektrum des entstehenden Ausgleichvorgangs dasselbe, welches bei Zuführung eines Stromes mit konstanter Stärke und variabler Frequenz erhalten wird, also gleich der Spannungsresonanzkurve unseres Ersatzsystems:

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{J}}{i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) + \frac{1}{R}},$$

welche infolge der verhältnismäßig hohen Dämpfung sehr flach verläuft. Wir erhalten

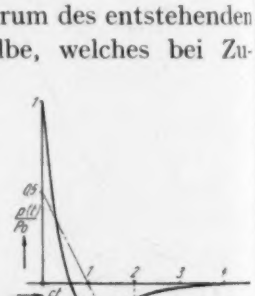


Abb. 2. Zeitlicher Verlauf eines Kugelknalls
——— nach dem vorliegenden Ersatzschema
-·-·- nach der RAYLEIGHschen Lösung für gleiche Anfangsbedingungen

also das Fourier-Integral:

$$(3a)\quad U(t)=\frac{U_0\cdot C}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)+\frac{1}{R}}\,d\omega,$$

bzw.

$$(3b)\quad p(t)=\frac{P_0 r}{2\pi\cdot 3\varrho c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{i\left(\frac{\omega r}{3\varrho c^2}-\frac{1}{\omega\varrho r}\right)+\frac{1}{\varrho c}}\,d\omega,$$

worin der Amplitudenverlauf des Spektrums gekennzeichnet ist durch:

$$(4)\quad A(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{P_0\frac{r}{c}}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega r}{c}\right)-3\left(\frac{c}{\omega r}\right)\right]^2+9}}=\frac{1}{\pi}\frac{P_0}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{3c}{r}\right)^2\left(\frac{c}{\omega r}\right)^2+3\left(\frac{c}{r}\right)^2}}.$$

Vergleicht man dies mit der entsprechenden von WEBER angegebenen Formel:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{P_0}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{3c}{r}\right)^2\left(\frac{c}{\omega r}\right)^2+9\left(\frac{c}{r}\right)^2}},$$

so sieht man deutlich, daß die erhaltene Lösung im wesentlichen den gleichen Frequenzgang nur mit einem etwas geringeren Dämpfungsglied zeigt; dies bedeutet lediglich ein etwas stärker gekrümmtes und höher liegendes Maximum. Der Vergleich ist in Abb. 3 eingezeichnet. Im gleichen Sinne weichen auch WEBERS experimentell gefundene Werte von seiner Formel ab.

Das gegebene äußerst einfache Ersatzschema erscheint demnach hinsichtlich Zeitverlauf und Spektrum als brauchbar, obschon es mehrere willkürliche Annahmen enthält. Eine davon, die Auffassung des Kugelinnern als reine Federung, können wir fallen lassen. Lord RAYLEIGH[4]) hat gezeigt, wie sich eine willkürlich gegebene kugelsymmetrische Anfangsverteilung von Druck und Schnelle ausbreitet und H. LAMB[5]) brachte den vorliegenden Spezialfall als Anwendungsbeispiel zu dieser Theorie. Hiernach ergibt sich für jeden außerhalb der Kugel gelegenen Beobachtungspunkt ein Zeitverlauf, der aus zwei spiegelbildlich aneinander anschließenden Halbwellen mit sprungweisem Anfang und Ende und einer diese verbindenden fallenden Gerade besteht.

$$(5)\quad p=\frac{P_0}{2}\cdot\frac{r}{a}\left(1-\frac{ct'}{r}\right)\qquad 0<t'<\frac{2r}{c}$$
$$p=0\qquad t'>\frac{2r}{c}$$

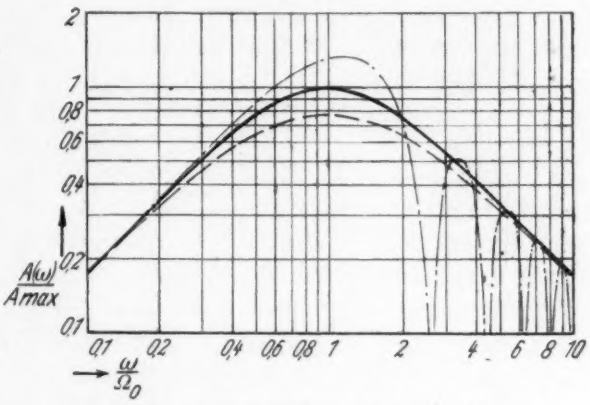


Abb. 3. Schallspektrum eines Kugelknalls

——— nach der vorliegenden Rechnung
..... nach der von W. WEBER angegebenen Formel
– · – · – nach der RAYLEIGHschen Lösung für gleiche Anfangsbedingungen

Zum Vergleich ziehen wir den Verlauf unmittelbar an der Kugeloberfläche heran:

$$(5a)\quad p=\frac{P_0}{2}\left(1-\frac{ct}{r}\right)\qquad 0<t<\frac{2r}{c}.$$
$$p=0\qquad t>\frac{2r}{c}.$$

Dieser Verlauf ist in Abb. 2 strichpunktiert eingetragen. Er erweist sich als weniger ähnlich mit den bekannten Knalloszillogrammen als der nach dem Ersatzschema erhaltene, ein Zeichen dafür, daß wir den Anfangszustand nicht richtig angesetzt haben. Im Hinblick auf die Unsicherheit in der richtigen Beschreibung des Anfangszustandes bringt das Zurückgreifen auf die strenge Lösung des linearen Problems gegenüber unserem einfachen Ersatzschema keine Verbesserung.

Auch das zugehörige Spektrum paßt sich schlechter dem einfachen experimentellen Befund an, obschon es interessanterweise in den Randgebieten asymptotisch mit den früheren zusammenfällt. Zu seiner Ermittlung verschiebt man zweckmäßig den Nullpunkt in den Symme-

[4]) LORD RAYLEIGH, Theory of Sound II, § 279.
[5]) H. LAMB, Hydrodynamics 5. Aufl. Kap. 10, § 286 (Deutsche Übers. E. HELLY, Leipzig 1931.)

triepunkt. Die Funktion $\psi(t)$ wird dann ungerade und enthält nur Sinusglieder, deren Amplituden sich ergeben aus:

$$(6) \quad A(\omega) = \frac{P_0 c}{\pi r} \int_0^{\frac{r}{c}} t \sin \omega t \, dt$$
$$= \frac{P_0 r}{\pi c} \left[\left(\frac{c}{\omega r} \right)^2 \sin \left(\frac{\omega r}{c} \right) - \left(\frac{c}{\omega r} \right) \cos \left(\frac{\omega r}{c} \right) \right].$$

Der zugehörige Verlauf ist in Abb. 3 strichpunktiert eingetragen. Für sehr tiefe Frequenzen gilt wie oben:

$$(6a) \quad A(\omega) = \frac{P_0 r}{\pi c} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\omega r}{c} \right).$$

Die Kurve steigt dann zu einem höheren Maximum. Jenseits desselben im abfallenden Teil weist das Spektrum Nullstellen auf, die sich aus dem symmetrischen Verlauf und der endlichen Begrenzung des Druckverlaufes ergeben. Die zwischen diesen liegenden Maxima nähern sich jedoch der gleichen asymptotischen Linie wie das Spektrum der Gleichung (4) nämlich:

$$(6b) \quad A(\omega) = \frac{P_0 r}{\pi c} \cdot \left(\frac{c}{\omega r} \right).$$

Bei einer Untersuchung des Spektrums mit Hilfe von Oktavsieben treten die Einbrüche kaum in Erscheinung und es bleibt nur die abfallende Tendenz übrig. Aber auch nach Durchführung einer solchen Mittelwertbildung befriedigt das aus der strengen Lösung gewonnene Spektrum nicht mehr als das einfache Ersatzschema.

Es lassen sich im übrigen sehr verschieden aussehende Funktionen der Zeit angeben, die im Bereich hoher und tiefer Frequenzen die gleichen Anstieg- und Abfalltendenzen aufweisen, denn diese Randgebiete tragen mit ihren niedrigen Werten wenig zu dem Ergebnis bei. Eine Übereinstimmung mit dem gemessenen Spektrum in diesen Gebieten erlaubt daher keinen Schluß auf die Richtigkeit eines angenommenen Kurvenverlaufes. Hierfür hält man sich besser an die Knalloszillogramme. Aber gerade in dieser Hinsicht erweist sich das angegebene Ersatzschema als befriedigend.

Zusammenfassung

Das von Weber angegebene akustische Ersatzschema für den Kugelknall wird mit einem elektrischen Ersatzkreis verglichen. Das von Weber ermittelte Spektrum wird im wesentlichen bestätigt. Zugleich wird der zugehörige Zeitverlauf des Kugelknalls angegeben.

Die Ergebnisse des Ersatzschemas werden ferner mit denjenigen der Theorie von Rayleigh und Lamb unter Beibehaltung der Anfangsbedingungen verglichen. Es zeigt sich, daß die strenge Lösung infolge der Unsicherheit in der richtigen Erfassung des für die linearen Gleichungen anzusetzenden Anfangszustandes keine Verbesserung gegenüber dem einfachen Ersatzschema bringt.

(Eingegangen am 6. Januar 1940.)

PATENTSCHAU

Bearbeitet von Heinrich Kösters

138.

Deutsches Patent Nr. 683873, patentiert ab 20. 1. 1935, ausgegeben am 17. 11. 1939.

Tobis-Tonbildsyndikat AG. in Berlin, Dipl.-Ing. Otto Körnei

Vorrichtung zur Änderung der Aussteuerung eines Tonaufzeichnungsgerätes

Nach dem Patent soll die Aussteuerung eines Tonaufzeichnungsgerätes mit Hilfe eines gleichgerichteten Anteiles der Tonfrequenz durch Änderung des Richtfeldes des Aufzeichnungssystemes erfolgen (z. B. Änderung des Magnetfeldes einer Oszillographenschleife). Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß im Gegensatz zu einer Änderung des Verstärkungsgrades das Grundgeräusch durch die Steuerung nicht beeinflußt wird.

139.

Deutsches Patent Nr. 684281, patentiert ab 20. 7. 1932, ausgegeben am 25. 11. 1939

Klangfilm GmbH. in Berlin. Erwin Gerlach.

Dämpfungseinrichtung für in Öl befindliche Schwingungselemente, insbesondere für Lichttonaufzeichnungsgeräte

Es ist bekannt, die Dämpfung von schwingenden Systemen in Öl dadurch zu erhöhen, daß unmittel-

bar neben dem Schwingungselement eine Platte angebracht wird. Da jedoch, insbesondere bei Verwendung zähflüssiger Öle, die Dämpfung stark temperaturabhängig ist, wird vorgeschlagen, diese Gegenplatte an einem Bi-Metallstreifen zu befestigen, so daß sie bei steigender Temperatur sich dem Schwingungssystem nähert und die Verminderung der Dämpfung, die durch die Verdünnung des Öls eintritt, ausgleicht.

140.

Deutsches Patent Nr. 684312, patentiert ab 13. 6. 1934, ausgegeben am 25. 11. 1939

Dr. Oskar Vierling in Hannover

Schaltungsanordnung zur Beseitigung von Störungen bei elektrischen Musikinstrumenten

Um zu vermeiden, daß bei elektrischen Musikinstrumenten Übersteuerungen des Endrohres oder Lautsprechers auftreten, soll im Verstärker eine automatische Amplitudenbegrenzung eingeführt werden. Gleichzeitig soll der Übertragungsweg erst dann freigegeben werden, wenn die Nutzspannung des Tongenerators größer als die Störspannung ist.

141.

Deutsches Patent Nr. 684320, patentiert ab 18. 6. 1935, ausgegeben am 25. 11. 1939

Aktiengesellschaft vormals Skodawerke in Pilsen in Prag

Schallempfänger für Abhorchvorrichtungen

Bei binauralen Horchgeräten ist bekanntlich die Peilschärfe von der Länge der Basis und die Reichweite von der Richtwirkung der Empfänger abhängig. Große Basis und große Empfänger mit

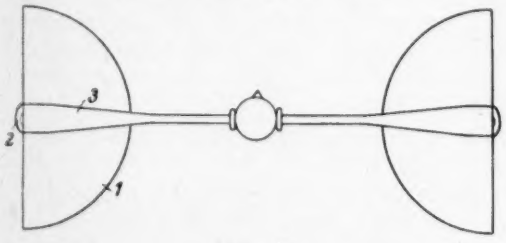


Abb. 1a

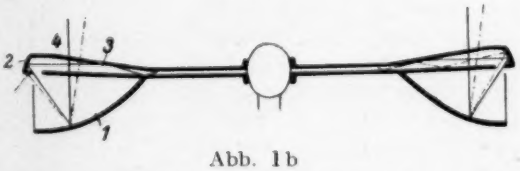


Abb. 1b

Abb. 1a u. 1b. Horchgerät

starkem Richtvermögen bedeuten aber großen Platzaufwand. Benutzt man gewöhnliche Hohlspiegel als Schallsammler, so fällt der geometrische Schwerpunkt dieses Spiegels mit dem akustischen Schwerpunkt zusammen. Nach dem Patent soll deshalb ein Parabolspiegel benutzt werden, dessen akustischer Schwerpunkt nicht mit dem geometrischen Schwerpunkt übereinstimmt, und zwar so, daß der Abstand der akustischen Schwerpunkte bei der Schallsammlung größer ist als der Abstand der geometrischen Schwerpunkte. Eine Ausführungsform ist in den Abb. 1a und b dargestellt. Abb. 1a zeigt das Horchgerät von der Schallquelle aus gesehen, Abb. 1b das Horchgerät von der Seite. Der einfallende Schallstrahl 4 fällt auf den Parabolspiegel 1, von dort auf den Spiegel 2 und gelangt durch die Schallführung 3 zum Ohr des Beobachters. Bei Verwendung eines runden Hohlspiegels würde der Mittelstrahl 4 bei gleichen äußeren Maßen des ganzen Horchgerätes und gleicher Fläche des Schallsammlers näher zum Beobachter liegen, wodurch sich eine kleinere wirksame Basis ergibt.

142.

Deutsches Patent Nr. 684457, patentiert ab 1. 9. 1935, ausgegeben am 9. 11. 1939

Electrical Research Products Inc. in New York, V. St. A.

Elektrischer Tonabnehmer

Das Patent beschreibt einen Tonabnehmer für Seiten- und Tiefenschrift, dessen Wirkungsweise sich aus Abb. 2 ersehen läßt. Der Schreibstift 24 mit der Nadel 25 ist an einem Körper 21 angebracht,

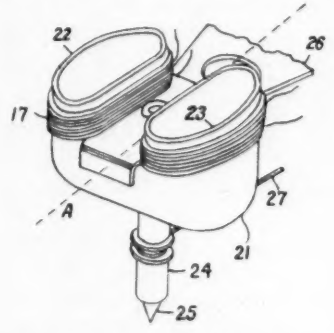


Abb. 2. Tonabnehmer für Tiefen- und Seitenschrift

der zwei ovale Tauchspulen 22 und 23 trägt. Diese beiden Tauchspulen ragen in den Luftspalt zweier nichtgezeichneter Magnete hinein. Das gesamte schwingende System ist mit der Feder 26 und dem Draht 27 aufgehängt. Die Federung ist so beschaffen, daß sich das System auf- und abbewegen und um eine durch die Feder 26 laufende Achse (A) drehen kann. Bei der Tiefenschrift bewegen sich beide Tauchspulen gleichsinnig auf und ab. Bei Seitenschrift bewegen sich beide Spulen wegen der Verdrehung der Feder 26 in entgegengesetztem Sinne. Zur Abtastung der einen oder anderen Schriftart ist es notwendig, die Spulen parallel oder gegeneinander zu schalten.

143.

Deutsches Patent Nr. 684 800, patentiert ab 12. 12. 1937, ausgegeben am 6. 12. 1939

Telefunken-Gesellschaft für drahtlose Telegraphie mbH. in Berlin. Reinhold Bausinger

Schaltungsanordnung zur Aufhebung der Gleichstromvormagnetisierung eines Übertragers

Zur Aufhebung der Vormagnetisierung eines Ausgangsübertragers mit Lautsprecheranschluß wird vorgeschlagen, in bekannter Weise auf den Übertrager (Abb. 3) eine zusätzliche Wicklung *H* anzubringen, die in entgegengesetzter Richtung vom Gleichstrom durchflossen wird, wobei als Vorschaltwiderstand für diese Wicklung das Feld *F* des Lautsprechers benutzt wird.

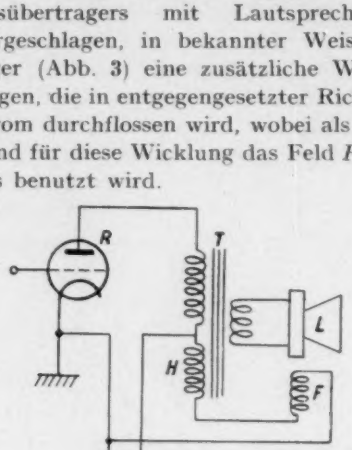


Abb. 3. Ausgangsschaltung für Verstärker

144.

Deutsches Patent Nr. 684 856, patentiert ab 24. 11. 1933, ausgegeben am 6. 12 1939

Siemens u. Halske A.G. in Berlin-Siemensstadt

Summergerät, in dem mehr als zwei Grundfrequenzen verwendet werden

Mit Hilfe der bekannten Schwebungssummer, bei denen die Tonfrequenz durch Überlagerung zweier Hochfrequenzen gewonnen wird, ist es schwierig, Frequenzen im Bereich von 0—10 Hz herzustellen. Dies beruht darauf, daß sobald die beiden Hochfrequenzen fast übereinstimmen, leicht Zieherscheinungen auftreten, die eine große Instabilität und einen störenden Klirrfaktor mit sich bringen. Nach dem Patent sollen deshalb mindestens 3 Hochfrequenzen a, b und c benutzt werden. Durch Überlagerung der Frequenz a mit der Frequenz b wird eine Differenzfrequenz x gebildet. Durch Bildung der Differenzfrequenz von x und der Frequenz c des dritten Generators wird die Tonfrequenz erzeugt. Hierbei können leicht alle drei Hochfrequenzen soweit verschieden sein, daß keine Zieherscheinungen auftreten. Ein derartiger Schwebungssummer kann ohne Schwierigkeiten Frequenzen von 0—20000 Hz ohne störenden Klirrfaktor und bei konstanter Ausgangsspannung erzeugen.

SCHRIFTTUM

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

E. Hiedemann, **Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung.** Verlag Walter de Gruyter u. Co. Berlin 1939. Preis geb. 24,00 RM.

Das Gebiet der hochfrequenten Schallschwingungen hat durch den bekannten Verfasser, aus dessen Institut an der Kölner Universität eine große Zahl wertvoller Arbeiten des behandelten Sondergebietes hervorgegangen ist, eine ausgezeichnete, straff zusammengefaßte und auf das wesentliche sich beschränkende Bearbeitung gefunden. Nach einer Beschreibung der für die Erzeugung von Ultraschall in Frage kommenden Schallsender, die sich praktisch für den Bereich von 10—100 kHz auf die magnetostriktiven und von 100 kHz bis 10 MHz auf die piezoelektrischen Schallgeber beschränken, wird ausführlich auf die zahlreichen optischen Methoden der Untersuchung des Schallfeldes und der Schallausbreitung eingegangen. Bekanntlich haben hier die Debye-Sears und Lucas-Biquardschen Versuche, die Schallwelle als optisches Gitter zu benutzen, außerordentlich anregend gewirkt. Es ist nicht nur gelungen, aus Messungen der Schallgeschwindigkeit nach diesen Verfahren die genauesten Werte für die elastischen Konstanten vieler Flüssigkeiten und auch fester Stoffe zu erhalten, sondern viele praktischen Aufgaben, wie die Prüfung und Vergütung von Werkstoffen, die Lichtsteuerung in Fernsehempfängern u. a. sind gleichfalls durch die innige Berührung zwischen Optik und Akustik gefördert worden. Im letzten Abschnitt des Buches werden diese technischen Anwendungen ausführlich besprochen. In besonderen Kapiteln werden hier die physikalisch-chemische und biologische Wirkung des Ultraschalls, die Herstellung disperser Systeme, das Verhalten von Schwebestoffen im Schallfeld und die Unterwasserschalltechnik neben den schon angeführten technischen Aufgaben eingehend behandelt.

Die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet; die Wiedergabe der Abbildungen auf bestem Papier hervorragend. Um den umfangreichen Stoff in einem handlichen Band unterzubringen, ist weitgehend von Kleindruck Gebrauch gemacht worden. Vielleicht ist es möglich, in einer späteren Auflage hier die Schrift etwas größer zu wählen.

Grützmacher

FERDINAND TRENDELENBURG, **Einführung in die Akustik.** Verlag Julius Springer, Berlin 1939. 277 Seiten mit 215 Abbildungen. Geb. 24,60 RM.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, „dem Studierenden eine Einführung in die Akustik und dem auf einem Spezialgebiet arbeitenden Ingenieur und Wissenschaftler einen Einblick in ihm fernerstehende Gebiete der Akustik zu ermöglichen". Dementsprechend sind erst allgemeine Fragen der Schwingungs- und Wellenlehre behandelt. Von anderen ähnlichen Darstellungen unterscheidet sich dieses erste Kapitel dadurch, daß zur Veranschaulichung theoretischer Ableitungen viele praktische Beispiele aus der angewandten Akustik gegeben werden, was den Stoff außerordentlich belebt. Es folgt dann ein Kapitel über Meßtechnik, in dem in einem weiten Rahmen die Schallfeldgrößen und ihre Meßmethoden besprochen werden. In ähnlicher Weise ist das Kapitel Schallerzeugung aufgebaut, in der einfache und komplizierte Strahlungsanordnungen zunächst theoretisch behandelt werden; es schließen sich dann die Musikinstrumente, die menschliche Stimme und die elektrischen Schallsender an. In dem Kapitel Schallausbreitung werden nicht bloß Fragen der Schallgeschwindigkeit, sondern auch Sonderfragen der Raum- und Bauakustik dargestellt. Im Kapitel Schallempfang und Schallaufzeichnung sind die wesentlichen Fragen über Mikrophone, soweit sie praktische Bedeutung haben, zusammengestellt. Auch das Gehörorgan erfährt hier eine ausführlichere Behandlung. Ein Kapitel Schallanalyse beschließt das Buch, dem noch ein Anhang über Benennungen in der Akustik und eine Formelübersicht beigegeben sind.

Während die ausländische Literatur mehrere Bücher dieser Art kennt, fehlte bisher in Deutschland ein solches Werk. Der Verfasser hat sich damit ein großes Verdienst erworben und die Aufgabe, die er sich vorgenommen hat, hervorragend gelöst. Die große Schwierigkeit beim Schreiben eines solchen Buches besteht ja darin, aus der Fülle des zur Verfügung stehenden Stoffes das Geeignete und Wesentliche herauszusuchen; hierzu gehört ein umfassender Blick für die Zusammenhänge unter den zahlreichen Teilgebieten der physikalischen und technischen Akustik. Das Buch zeigt, daß der Autor nicht bloß einen sehr großen Schatz eigener Erfahrungen im wissenschaftlichen Arbeiten besitzt, sondern daß er auch über große literarische Kenntnisse verfügt. In diesem Zusammenhang mögen auch die zahlreichen historischen Anmerkungen gewertet werden, die weniger bekannte große Leistungen auf akustischem Gebiet stärker betonen. Hierzu gehören z. B. das Ohmsche Gesetz der physiologischen Akustik und das elektrodynamische Telefon von W. v. Siemens.

Das Buch kann allen Interessenten, insbesondere den eingangs genannten Gruppen warm empfohlen werden. Druck und Ausstattung sind sehr gut.

E. MEYER

HEINRICH STENZEL, **Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen.** Verlag Julius Springer, Berlin. 124 Seiten mit 106 Abbildungen. Preis RM. 12,60.

Das Buch behandelt in der Hauptsache die Schallstrahlungsvorgänge von Membranen und Gruppensendeanlagen, Probleme, die in der elektrischen Schallübertragungstechnik und in der Wasserschalltechnik eine große praktische Rolle spielen. Die Literatur hierüber ist im letzten Jahrzehnt außerordentlich stark angewachsen und über vielen Zeitschriften zerstreut. Der Verfasser, der selbst einer der ersten Fachleute auf diesem Gebiet ist, unternimmt es, eine zusammenfassende Darstellung zu geben. Der erste Teil behandelt das Schallfeld in großer Entfernung vom Strahler, was mathematisch zu Problemen geringerer Schwierigkeiten führt. Im einzelnen werden besprochen: Der Richtfaktor von Kolbenmembranen und von einer Anzahl punktförmiger Strahler, die kombinierte Richtwirkung von Strahlern und Strahlergruppen, die Richtwirkung von unterteilt schwingenden Membranen, der Richtfaktor bei einem Geräusch und schließlich die Fragen der künstlichen Charakteristik. Alle Überlegungen gelten sowohl für Sender wie für Empfänger. Für die Schallausstrahlung von Sendern spielt eine Rolle, wie groß die Schallverdichtung in einer bestimmten Richtung im Vergleich zur ungebündelten Strahlung ist. Dazu muß die gesamt abgestrahlte Leistung bekannt sein. Es wird ein Strahlungsfaktor bzw. sein Kehrwert ein Verdichtungsfaktor definiert und für die oben genannten Einzelfälle berechnet.

Der zweite Teil des Buches betrifft das Schallfeld in der Nähe des Senders und zwar für zwei Fälle, für eine Gruppe von zwei Einzelstrahlern und für die kreisförmige Kolbenmembran. Zur Kennzeichnung des Nahfeldes werden die Kurven konstanten Schalldruckes berechnet und aufgetragen; sie sind außerordentlich interessant und zeigen eine komplizierte Struktur, was besonders in dem anscheinend so einfachen Fall einer kreisförmigen Kolbenmembran auffällt.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit dem Kugelstrahler, zunächst mit dem Strahler 1. Ordnung, für den wiederum die Kurven konstanten Schalldruckes angegeben werden. Es folgt der Kugelstrahler, bei dem nur ein Teil wirksam ist (strahlende Kugelkappe). Ein letzter Absatz ist schließlich die Schallfeldstörung durch eine starre Kugel. Es werden wiederum der Einfluß der Kugel in größerer Entfernung (Störfaktor) sowie die Kurven konstanten Schalldruckes in der Nähe der starren Kugel behandelt.

Die vorstehende kurze Inhaltsangabe zeigt, daß das Buch nicht bloß eine übersichtliche und kri-

tische Zusammenstellung von bereits veröffentlichten Erkenntnissen ist, sondern in sehr vielen Teilen vollkommen neue Originalarbeit enthält. Der Verfasser hat es verstanden, das an sich mathematisch so schwierige Gebiet auch dem technisch interessierten Leser nahezubringen. Es besteht kein Zweifel, daß der Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen für alle, die auf dem Gebiet der physikalischen oder technischen Akustik zu arbeiten haben, eine große Hilfe bedeutet und viele Anregungen bringt. E. MEYER

W. HORN und K. KETTERER, **Lebendige Sprache.** Experimentalphonetische Untersuchungen. Verlag Walter de Gruyter u. Co., Berlin 1938/39.

Heft 1. Intonation und Lautgebung in der englischen Aussprache des Prof. Daniel Jones von H. KRAUSE (mit 103 Tafeln), Preis geh. 8,— RM.

Heft 2. Akzent und Wortkörper in der Sprache des Prof. A. Lloyd James von HEINZ HEILMANN (mit 75 Tafeln), Preis geh. 8,— RM.

Heft 3. Intonation und Vokalqualität in den englischen Mundarten von Norfolk und Suffolk von RUTH HOHENSTEIN (mit 26 Tafeln), Preis geh. 3,— RM.

Heft 4. Intonation und Lautgebung in der englischen Aussprache des Lord Roberts von HERBERT BLASCHE (mit 113 Tafeln), Preis geh. 8,— RM.

Heft 5. Intonation und Lautgebung in der Sprache von Lloyd George von HERBERT ROHMANN (mit 85 Tafeln), Preis geh. 8,— RM.

Heft 6. Lautdauer und Intonation in der Sprache von Stanley Baldwin von RUDOLF BIRK (mit 98 Tafeln), Preis geh. 8,— RM.

Heft 7. Die phonetischen Mittel der Deklamation bei W. J. Holloway in der Wiedergabe der Leichenrede des Mark Anton von ARNO SIEGLOCH (mit 83 Tafeln), Preis geh. 8,— RM.

Wie in der Einführung zu der vorliegenden Heftreihe betont wird, sollen die Untersuchungen dazu dienen, die Sprachen der Gegenwart mit den Mitteln der neueren Akustik zu analysieren. Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse sollen sprachgeschichtliche Forschungen unternommen werden. Zunächst erschienen Arbeiten ausschließlich über englische Sprecher, doch sollen auch die deutschen Mundarten in Zukunft Berücksichtigung finden. Die Untersuchungsmethode ist bei allen Arbeiten die gleiche. Es wird von Schallplatten mit dem von K. KETTERER angegebenen Rußschreiber eine oszillographische Aufzeichnung erhalten, welche nach Lautdauer und Grundtonfrequenz ausgewertet wird. Die Lautdauer von Vokalen und Konsonanten wird im einzelnen gemessen und tabellarisch unter „Quantitäten" zusammengefaßt. Aus der Grundtonfrequenz werden die Melodiekurven gewonnen, die in allen Heften vollständig mit daruntergeschriebener phonetischer Umschrift wiedergegeben sind. Darüber hinaus wird das Material nach bestimmten Gesichtspunkten geordnet und graphisch aufgetragen. Z. B. wird die Quantitätsverteilung der Vokale und Diphthonge, insbesondere auch vor stimmhaften und stimmlosen Konsonanten, die Eigendauer der Vokale vor verschiedenen Lauten, die Quantität stimmhafter und stimmloser Konsonanten, z. B. auch in Abhängigkeit vom Stärkegrad der Silbe, mit der sie beginnen, in Bildern gezeigt. Weiterhin werden Tonhöheverteilung, Einsatztonhöhe und der Einfluß der Grundtonhöhe auf die Vokalklangfarbe (Klangfarbe hier gehörsmäßig erfaßt) dargestellt. Die Möglichkeiten, derartiges sprachliches Material statistisch zu erfassen, sind naturgemäß zahlreich. Bemerkenswert ist die von K. KETTERER angegebene Projektionsdarstellung der Silbenmelodie, welche die Richtung der Melodiekurven veranschaulicht, und das Wesentliche erkennen läßt. An Hand des vorliegenden Materials können bereits Vergleiche zwischen den verschiedenen Sprechern hinsichtlich ihrer völkischen Zugehörigkeit, ihres Temperaments und anderer interessanter Eigenschaften der Persönlichkeit gezogen werden, und es ist zu hoffen, daß ähnliche Untersuchungen, vielleicht auch unter Berücksichtigung der Klangfarbe, auch an der deutschen Sprache angestellt werden. LOTTERMOSER

HARRY F. OLSON, Associate Member, Jer., **Line Mikrophones.** Proc. Inst. Radio Engrs., N. Y. 7 (1939), S. 438.

Eine wesentliche Eigenschaft von Mikrophonen ist der räumliche Winkel, über den die einfallenden Schallstrahlen ungeschwächt aufgenommen werden. Durch den sog. effektiven Raumwinkel der Richtcharakteristik ist das Verhältnis des direkten Schalles zum reflektierten Schall bestimmt. Für Zwecke der Schallaufnahme im Rundfunk, beim Tonfilm, bei der Schallplatte usw. ist es wichtig, daß die Richtcharakteristik frequenzunabhängig ist. In der Praxis sind bisher außer der Kugelcharakteristik eines im Verhältnis zur Wellenlänge kleinen Druckempfängers zwei Formen frequenzunabhängiger Richtcharakteristiken bekannt, die sog. Achterkurve (bidirectional) und Kardioide (unidirectional). Der Vorteil solcher Richtcharakteristiken liegt in der Möglichkeit, unerwünschte Schalle gegenüber dem Nutzschall auszublenden, übertriebene Nachhallwirkungen zu mindern oder aber bei gleicher Nachhallwirkung die Entfernung zwischen Mikrophon und Schallquelle zu vergrößern. In vielen Fällen ist es in der Praxis erwünscht, ein wesentlich stärker gerichtetes Schallaufnahmesystem zu besitzen. Ein neues Schallaufnahmesystem dieser Art besitzt eine größere Anzahl enger Röhren verschiedener Länge, die zu einem Bündel zusammengefaßt auf eine gemeinsame Kammer münden, in der ein Bändchen in einem magnetischen Feld angeordnet ist zwecks Umwandlung der Schallschwingungen in elektrische Schwingungen. Nach

dem Bändchen folgt ein akustischer Widerstand von der Größe des Widerstandes der Röhrenkombination. Durch die verschiedenen Laufzeiten des Schalles in den einzelnen Röhren erzielt man Richtcharakteristiken, die stark von der Frequenz, d. h. von dem Verhältnis der Rohrlänge zur Wellenlänge abhängig sind. Mit zunehmendem Verhältnis wird die Richtcharakteristik immer stärker gebündelt. Variiert man die Rohrlänge außer durch die Staffelung der Mündungsöffnungen noch durch verschieden lange Umwege, etwa der jeweiligen halben Rohrlänge entsprechend, so erhält man Richtcharakteristiken, die in ihrer Form gegenüber der ersten Ausführung bei — gleichen Frequenzen verglichen — stärker gerichtet sind. Eine weitere Abwandlung der Richtkurven nach starker Bündelung erhält man, wenn das schallaufnehmende Bändchen als Druckgradientenempfänger zwischen zwei Röhrensystemen der erwähnten Art eingebaut wird. Das eine Röhrensystem besitzt dabei durch Einbau eines gemeinsamen Umweges für alle Röhren eine bestimmte Phasendifferenz gegenüber dem anderen System. Jede dieser Anordnungen besitzt an einer Stelle des Frequenzbandes eine brauchbare und anzustrebende Richtcharakteristik. Fünf Systeme mit den angeführten verschiedenen Abwandlungen werden unter Berücksichtigung einer richtigen Dimensionierung so miteinander kombiniert, daß der ganze Frequenzbereich mit der gleichen Richtcharakteristik übertragen wird. Jedes System übernimmt dabei $^1/_5$ des Frequenzbandes, und zwar in dem Bereich, wo die Richtcharakteristik der angestrebten Form entspricht. Der restliche Teil des Frequenzbandes wird jeweils durch ein elektrisches Filter unterdrückt, wobei gleichzeitig Empfindlichkeitsunterschiede ausgeglichen werden.

Die verschiedenen Richtkurven lassen sich bei Anwendung von Polarkoordinaten annähernd durch Potenzen der Cosinus-Funktion darstellen. Mit zunehmender Potenz wird die Richtkurve immer spitzer, der ausgeblendete Raumwinkel immer kleiner.

Die nachstehende Tabelle gibt an, wie groß bei den verschiedenen Richtcharakteristiken in einem diffusen Schallfeld das Verhältnis der insgesamt einfallenden Schalleistung zu der aufgenommenen Schalleistung ist. In einer weiteren Spalte wird noch der Faktor angegeben, mit der die normale Mikrophonentfernung eines allseitig aufnehmenden Mikrophons (Kugelcharakteristik) multipliziert werden kann, wenn man bei dem Richtmikrophon die gleiche Nachhallwirkung zuläßt.

Funktion	Verhältnis von Gesamtschalleistung zu aufgenommener Schalleistung	Vergrößerungsfaktor für Mikrophonentfernung
$1 + \frac{\cos\varphi}{2}$ (Kardioide)	3	1,7
$\cos\varphi$	6	2,4
$\cos^2\varphi$	10	3,2
$\cos^3\varphi$	14	3,8
$\cos^4\varphi$	18	4,2
$\cos^6\varphi$	26	5,1

Der Verfasser beschreibt zum Schluß ein Mikrophon mit sehr stark gebündelter, frequenzunabhängiger Richtwirkung (ultradirectional), bestehend aus 5 Systemen. Der Übertragungsbereich geht von 85—8000 Hz. Die Gesamtlänge beträgt ca. 3 m. Die erreichte Richtkurve entspricht etwa der $\cos^4$-Funktion. W. Weber

J. F. Schouten, **Synthetischer Schall.** Philips techn. Rdsch. 4, (1939), H. 6, S. 176.

Bei der Erzeugung synthetischen Schalls nach einer gegebenen Schwingungskurve wurde bisher meist wie beim Tonfilm eine kreis- oder bandförmig angeordnete Periodenfolge spaltförmig von einer Photozelle abgetas'et. Verf. beschreibt ein Verfahren, bei dem nur eine Periode des Schalldruckverlaufs zur Erzeugung des Klanges benötigt wird, in der Weise, daß die Periode in Polarkoordinaten mit einer Breite von 40° umgezeichnet wird und den Ausschnitt einer Schablone bildet, der homogen beleuchtet wird. Vor dem Ausschnitt rotieren konzentrisch zu dem Koordinatenmittelpunkt der Schablone in Winkeln von 40° auf einer Kreisscheibe radial angeordnete Schlitze. In die dahinter aufgestellte Photozelle fällt nur Licht, das den Ausschnitt und einen Schlitz durchlaufen hat. Ist ein Schlitz am Ende der Periode angelangt, so tritt der folgende am Anfang der Periode ein. Am Ausgang des hinter die Photozelle geschalteten Verstärkers entsteht damit eine lückenlose Folge von Perioden, deren Form dem Schablonenausschnitt entspricht und mit einem Oszillographen kontrolliert werden kann. Um auch Phasenänderungen zwischen zwei Komponenten vernehmen zu können, ist ein Halter vorgesehen, der die drehbare Anbringung eines zweiten Schablonenausschnittes unter dem ersten ermöglicht. Die endliche Schlitzbreite der Abtastung ist von großem Einfluß auf die Frequenzkurve der Anlage. Wie eine Rechnung zeigt, wirkt sie in erster Näherung wie ein Filter, das die höheren Harmonischen in geringerem Maß durchläßt. Klanganalysen werden durchgeführt mit Impulsen verschiedener Breite, aus denen der Faktor — gemessene Teiltonintensität zu wirklicher — gewonnen wird.

Mit der beschriebenen Anlage wurde der Einfluß der Phase verschiedener Komponenten eines Klanges auf den Klangeindruck untersucht. Dabei wurde einmal mit Hilfe des zweiten Schablonenausschnitts die Phase eines aus zwei Tönen bestehenden Klanges, wie auch die gegenseitige Phasenlage von 20 einen Klang zusammensetzenden Teiltönen verändert. Die äußerlich so verschieden aussehenden Oszillogramme etwa gleicher spektraler Zusammensetzung